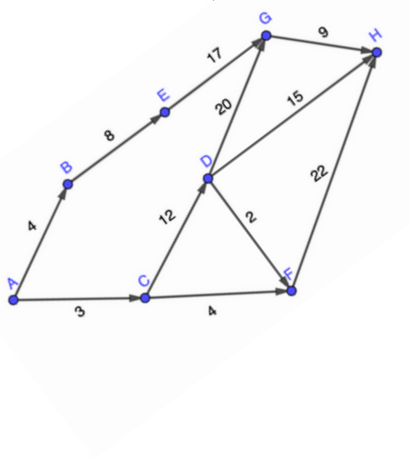


ESTUDI I DISSENY DE LA MILLORA DE LA XARXA D'AUTOBUSOS DE SANTA COLOMA DE GRAMENET MITJANÇANT L'APLICACIÓ DE GRAFS

TREBALL DE RECERCA

Autor: Boole

L’essència de les matemàtiques no és fer les coses senzilles complicades, sinó fer les coses complicades senzilles.

S. Gudder

ABSTRACT

In this project, an enhancement of the current bus network of Santa Coloma de Gramenet is proposed. The main aim of the project is to optimise both the number of bus stops and the time of each route using graph theory.

First of all, some research has been done with regard to the history of graphs and, more specifically, graph theory. Furthermore, I have explained both manual and computerised algorithms with which the optimisation of a graph can be performed.

Secondly, with regard to the practical aspect of the project, I have optimised the number of bus stops looking at the population density, and the amount of time invested in the route of each line. For this second optimisation, I have used the computer programme Excel and a specific tool called Solver. Nevertheless, this tool did not work, so I made those operations manually. Moreover, while I was working on the optimisations, I also created the corresponding blueprints.

To illustrate the viability of these proposals, a model of the city has been created. It has been built with a 3D printer, and different LEDs have been installed so as to represent the location of the different bus stops.

In light of all the information seen throughout the project, it can be concluded that it is possible to perform an optimisation of both of the aspects regarding the bus network of my city. Although there have been some technical problems, such as the tool Solver not working as expected, all the objectives have been reached.

RESUMEN

En este proyecto se propone una mejora de la actual red de autobuses de Santa Coloma de Gramanet. El principal objetivo del trabajo es optimizar tanto el número de paradas como el tiempo de cada ruta usando la teoría de grafos.

En primer lugar, se ha llevado a cabo una investigación con relación a la historia de grafos y, más concretamente, la teoría de grafos. Además, he explicado tanto algoritmos manuales como computarizados con los que se puede realizar la optimización de un grafo.

En segundo lugar, con relación a la parte práctica del proyecto, he optimizado el número de paradas de autobús teniendo en cuenta la densidad de población, y el tiempo invertido en la ruta de cada línea. Para esta segunda optimización, he usado el programa informático Excel y una herramienta específica llamada Solver. Sin embargo, esta herramienta no funcionó, así que tuve que realizar los cálculos correspondientes a mano. Además, mientras estaba trabajado en las optimizaciones, también creé los planos correspondientes.

Para ilustrar la viabilidad de estas propuestas, un modelo de la ciudad ha sido creado. Ha sido construido con una impresora 3D, y los diferentes LEDs han sido instalados para representar la localización de las diferentes paradas de autobús.

En vista de toda la información expuesta a lo largo del proyecto, se puede concluir que es posible realizar una optimización de los dos aspectos relacionados con la red de autobuses de mi ciudad. Aunque ha habido algunos problemas técnicos, como el fallo en el funcionamiento de la herramienta Solver, todos los objetivos han sido cumplidos.

ÍNDEX

1. INTRODUCCIÓ

El present Treball de Recerca és una aplicació pràctica de la teoria matemàtica de grafs per tal d'optimitzar la xarxa d'autobusos de la ciutat on visc, Santa Coloma de Gramenet.

La motivació principal per fer aquest treball ha estat el fet que sempre m'han agradat les matemàtiques, però des que vaig estar al programa Estalmat Catalunya, vaig poder descobrir facetes de les matemàtiques desconegudes i ben interessants per a mi. Actualment participo al programa Bojos per les Matemàtiques, i en aquest programa es va dedicar una sessió a l'estudi i aplicació dels grafs. Em va semblar increïblement interessant l'aplicació de les matemàtiques en la simplificació de camins, o bé per trobar el camí més curt, dins d'una xarxa, entre dos punts.

Això ha fet despertar en mi la curiositat de l'aplicació d'aquesta teoria en algun element que formi part de la nostra vida quotidiana. Els autobusos formen una xarxa de comunicació ben rica a la nostra ciutat, unint diferents punts, i connectant la nostra ciutat amb altres, com Barcelona o Badalona.

En aquest treball de recerca es fa un estudi de la xarxa d'autobusos de la meva ciutat, i es pretén, a través de l'aplicació de la teoria de grafs, realitzar una optimització.

Per tal de poder dur a terme el meu propòsit, s'ha realitzat una recerca teòrica sobre la teoria de grafs, i com poder transformar els grafs en taules de valors (o matrius) per tal d'optimitzar i trobar la funció més viable i adient de la xarxa. També s'ha dut a terme una recerca teòrica sobre la xarxa d'autobusos de la meva ciutat per tal de veure com estan interconnectats els diferents punts entre ells.

La part pràctica del treball consisteix a descriure la xarxa d'autobusos de Santa Coloma de Gramenet a través dels grafs, i procedir a l'estudi de la seva simplificació mitjançant l'aplicació d'aquesta teoria. També s'ha representat en una maqueta la simplificació d'una part d'aquesta xarxa, mostrant els beneficis d'aquesta aplicació.

2. HIPÒTESIS

Per dur a terme aquest treball, les hipòtesis que ens plantejarem seran la següents:

Es pot optimitzar el nombre de parades de la xarxa d'autobusos actual de Santa Coloma de Gramenet.

Es poden optimitzar els temps de cada línia mitjançant la teoria de grafs.

Per tal de poder contrastar aquestes hipòtesis, es plantegen els següents objectius:

- Conèixer què és la teoria de grafs i les seves aplicacions.
- Conèixer l'actual xarxa d'autobusos de Santa Coloma de Gramenet i el seu funcionament.
- Aplicar la teoria de grafs sobre l'actual xarxa d'autobusos de Santa Coloma de Gramenet per veure si es pot efectuar una millora.
- Fer una maqueta d'una de les xarxes d'autobusos de Santa Coloma on s'ha aplicat la millora mitjançant els grafs.

Per tant, durant la realització del treball, s'ha de realitzar un estudi teòric sobre la teoria de grafs, per una banda, i un estudi teòric de l'actual xarxa d'autobusos de la ciutat de Santa Coloma de Gramenet.

La representació mitjançant una maqueta d'una de les xarxes d'autobusos pretén posar en rellevància l'aplicació de la teoria, i demostrar de forma pràctica allò que es demostri matemàticament.

Durant el present treball de recerca es van resolent tant les qüestions teòriques com les pràctiques per tal de donar resposta i poder contrastar o refutar les hipòtesis plantejada.

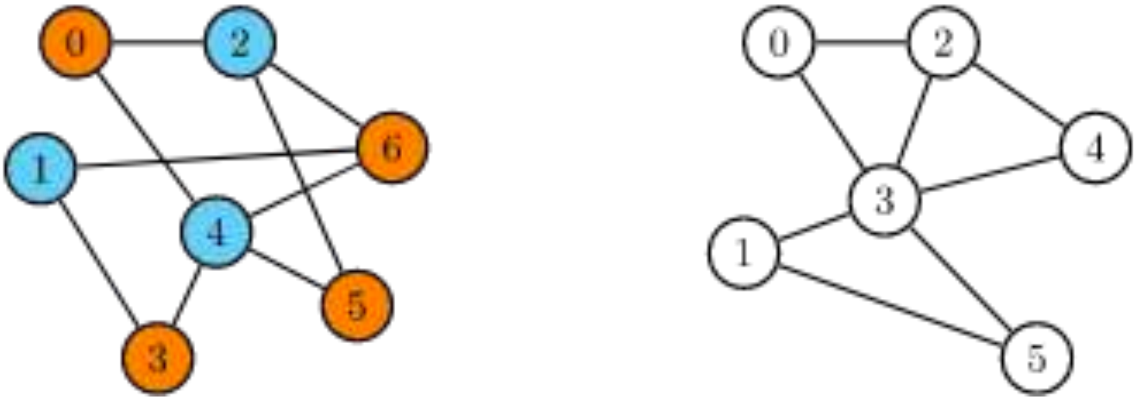
3. TEORIA DE GRAFS

3.1. Introducció a la teoria de grafs

En matemàtiques i en ciències de la computació, la teoria de grafs o teoria de les gràfiques és aquella que s'encarrega d'estudiar el concepte i les propietats dels grafs. L'objectiu d'aquesta teoria és representar de manera visual dades mitjançant vèrtexs, arestes i relacions. Un graf es defineix com a un conjunt no buit d'objectes o parts, anomenades vèrtexs i arestes, que uneixen diferents vèrtexs entre si. Formalment, un graf s'expressa de la següent manera:

$$G = (V, E)$$

En aquesta notació, podem veure que V representa un conjunt no buit de vèrtex, i E és el conjunt d'arestes.



Imatge 1. Exemples de grafs. *Imatge extreta de https://www.aceptaelreto.com/problem/statement.php?id=279*

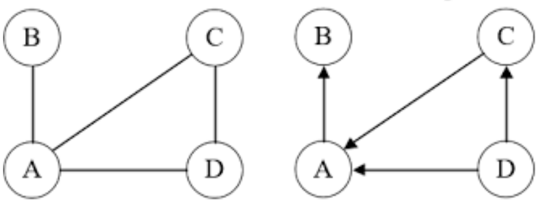
Per exemple, una manera d'expressar el graf de l'esquerra de la imatge 1 seria amb la següent expressió:

$$G = (7, 9)$$

Ens indica que el nostre graf *G* té 7 vèrtexs i 9 arestes, encara que podem representar els grafs amb altres expressions, com per exemple matrius, com veurem en altres apartats.

Abans de parlar sobre la història dels grafs, cal definir alguns conceptes clau sobre la seva composició. Els elements són els següents:

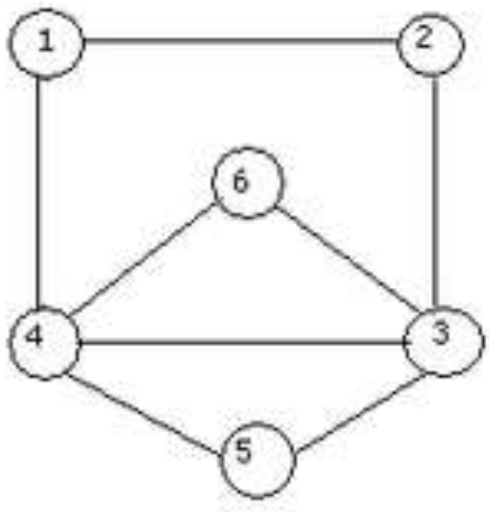
- Arestes: línies que uneixen els diferents vèrtexs, tal com s'ha esmentat prèviament. Les arestes poden ser de tres tipus:
    - Arestes adjacents: són aquelles que convergeixen en el mateix vèrtex.
    - Arestes paral·leles: són aquelles que tenen el mateix vèrtex inicial i final.
    - Arestes cícliques: són aquelles que tornen al mateix vèrtex d'origen.
    - Encreuament: punt on dues arestes es tallen.
- Vèrtex: punts o elements que formen un graf, extrems de les arestes. El grau del vèrtex es correspon al nombre d'arestes que hi passen, i, depenent d'aquest grau, el vèrtex es pot considerar parell o senar. Hi ha diferents tipus:
    - Vèrtex adjacent: es dona quan dos vèrtexs s'uneixen per una aresta.
    - Vèrtex aïllat: es dona quan el seu grau és zero, és a dir, no s'origina o finalitza cap aresta en ell.
    - Vèrtex terminal: és aquell que té grau 1.
- Camí: conjunt de vèrtexs que estan connectats per arestes. Per tant, dos vèrtexs estaran connectats si existeix un camí entre ells. Un camí ha de començar i acabar en vèrtexs, i cada vèrtex ha de ser incident (una aresta i un vèrtex seran incidents si el vèrtex és l'extrem de l'aresta) de les arestes que venen abans o després. La longitud del camí és el seu nombre d'arestes, de manera que els vèrtexs adjacents en un graf no dirigit, és a dir, aquell en què les arestes no tenen un sentit determinat indicat per una fletxa, serà



Imatge 2. Graf no dirigit (esquerra) envers graf dirigit (dreta). *Imatge extreta de https://www.researchgate.net/figure/Ejemplos-de-un-grafo-dirigido-y-un-grafo-no-dirigido_fig7_309278789*

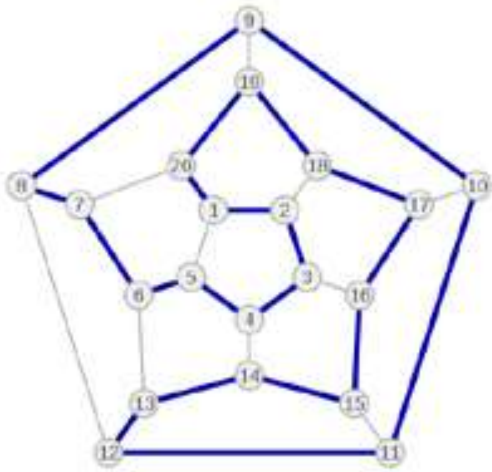
1, i així successivament. A partir de la definició de camí podem desenvolupar altres conceptes:

- Recorregut: camí sense arestes repetides.
- Camí obert: camí el vèrtex inicial i final del qual no coincideixen.
- Camí tancat: camí el vèrtex inicial i final del qual coincideixen.
- Camí simple: camí sense vèrtex repetits a excepció de, possiblement, el primer i l'últim. Pertany a una subcategoria dels recorreguts, ja que tampoc no presenta cap aresta repetida.
- Circuit: recorregut que és un camí tancat.
- Cicle: camí simple que és un camí tancat.
- Cicle eulerià: cicle que passa per totes les arestes del graf un únic cop (comença i acaba en el mateix vèrtex). Aquest tipus de camí va ser especialment quan Leonhard Euler va resoldre el conegut problema dels ponts de Königsberg. Si un graf admet un cicle eulerià passa a anomenar-se graf eulerià.



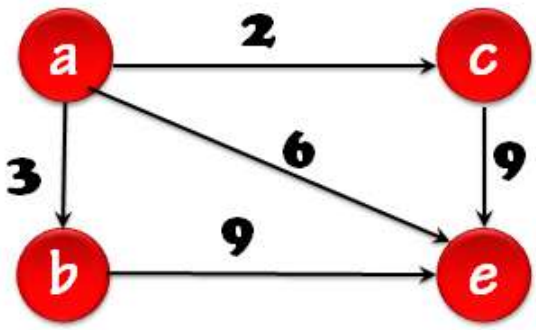
Imatge 3. Graf eulerià, que es pot dibuixar sense aixecar el llapis del paper i passant un únic cop per les arestes. *Imatge extreta de https://es.wikipedia.org/wiki/Ciclo_euleriano*

- Cicle hamiltonià: cicle que passa per tots els vèrtexs del graf un únic cop. Si el vèrtex inicial i final no coincideixen, parlem de camí hamiltonià.



Imatge 4. Graf hamiltonià. *Imatge extreta de https://sites.google.com/site/mdisc11211217/unidad-vi---grafos/grafos-eulerianos-y-hamiltonianoss*

- Trajectòries en els grafs dirigits: totes les definicions prèvies es poden aplicar als grafs dirigits, però els camins han de respectar la direcció i el sentit de les arestes. Malgrat això, si no es vol tenir en compte el sentit i es volguessin tractar les trajectòries com amb els grafs no dirigits, caldria anomenar als camins semicamins; als recorreguts, semirecorreguts, i així successivament.
- Trajectòries en grafs ponderats: primer de tot, cal definir què és un graf ponderat. És un tipus de graf en el qual cada aresta té associat un valor per representar una dada, com el cost, el pes, la longitud... Acostuma a emprar-se en l'anàlisi de xarxes socials i en l'àmbit de ciència de xarxes, ja que aquests tipus de grafs poden



Imatge 5. Graf ponderat. *Imatge extreta de http://163.10.22.82/OAS/estructuras_de_grafos/grafo_ponderado.html*

simplificar la complexitat d'algunes xarxes socials mitjançant les seves relacions amb valors.

Pel que fa a les trajectòries dels grafs ponderats, cal esmentar que el nivell d'un camí o semicamí es defineix com el valor mínim de totes les arestes que conté. Per exemple, un camí de nivell *a* estarà definit entre un parell de vèrtexs i totes les arestes que contindrà seran majors o iguals al valor *a*. La longitud del camí es defineix com la suma dels valors de les arestes incloses al camí.

- Graf camí: és aquell els vèrtexs del qual formen un camí. El nombre de vèrtex que tindrà serà *n*, amb la qual cosa el nombre d'arestes serà *n-1*.
- Graf connex: s'anomena graf connex o connectat, i consisteix en què tots els seus vèrtexs estan units per un camí, en el cas que sigui un graf no dirigit, o per un semicamí, en el cas que sigui un graf dirigit. En els grafs connexos, qualsevol vèrtex pertanyerà al conjunt de vèrtexs i es podrà arribar a ell mitjançant algun altre. El

Imatge 6. Graf inconnex amb tres components (esquerra) envers graf connex (dreta). *Imatge extreta de https://mestreacasa.gva.es/c/document_library/get_file?folderId=500018428976&name=DLFE-1363514.pdf*

cas oposat al graf connex és el graf inconnex, que és aquell que està format per diferents subgrafs connexos, també coneguts com components. En el cas dels grafs dirigits, si no tenim en compte el sentit de l'aresta estarem parlant de component dèbilment connex, mentre que, si tenim en compte el sentit, parlarem de component fortament connex.

- Diàmetre d'un graf connex: màxima distància entre un parell de vèrtex del graf.

- Connectivitat en teoria de grafs: hi ha dos conceptes per definir, la connectivitat de vèrtex i la d'arestes. La connectivitat de vèrtex és el nombre d'elements (és a dir, vèrtexs o arestes) mínim que es necessiten per, en ser eliminats, dividir el graf en components aïllats. La connectivitat és útil per mesurar la cohesió d'un graf, que serà cohesiu si conté moltes arestes, si els vèrtexs tenen un grau alt (recordem que el grau d'un vèrtex és el número d'arestes que hi incideixen), si té camins curts entre parells de vèrtex o si té un diàmetre petit. De manera formal, podríem definir la connectivitat de vèrtex d'un graf *G*, expressada com a *k(G)*, com al nombre mínim *k* per a què el graf tingui un tall de vèrtexs-*k*. El vèrtex de tall és aquell que, en ser eliminat, el graf passa a ser inconnex i a estar dividit en diversos components. Per exemple, en un graf de cinc vèrtexs com el que es mostra a la imatge 7, els vèrtexs de tall seran aquells que no són els finals (és a dir, hi haurà tres vèrtex de tall). Per tant, tornant a la definició formal de connectivitat, podem concloure que *k* és el número mínim de vèrtex de tall que hem de treure per crear un nombre *k* de desconnexions o talls de vèrtex. Per exemple, si el graf només té un vèrtex de tall, llavors *k(G)* = 1, ja que si traiem aquest vèrtex, el graf ja seria inconnex i hauríem creat una desconnexió o un tall de vèrtex, i així successivament si el nombre de vèrtexs de tall augmenta. D'altra banda, si tenim un graf inconnex, *k(G)* = 0, ja que no cal treure cap vèrtex, ja hi ha desconnexions i, per tant, el graf ja està dividit en diferents components.

  Imatge 7. Vèrtexs de tall. *Imatge extreta de https://es.wikipedia.org/wiki/V%C3%A9rtice_de_corte*

  D'altra banda, també existeix la connectivitat d'arestes, també coneguda com la connectivitat lineal i formalitzada amb l'expressió $\lambda(G)$. Es defineix com al número mínim λ que cal perquè el graf tingui un tall d'arestes-λ (cal esmentar que una aresta de tall és una aresta que, en ser eliminada, fa que el nombre de components d'un graf augmenti i que, per tant, també augmenti el número de desconnexions).

Pel que fa a la connectivitat, podem classificar els parells de vèrtexs en els grups següents:

- Feblement connectats: els vèrtexs estan units per un semicamí, amb la qual cosa estem parlant de grafs dirigits en els quals no considerem el sentit de l'aresta.
- Fortament connectats: els vèrtexs estan units per dos camins com a mínim. Un anirà del vèrtex A al B, i l'altre anirà de B a A.
- Unilateralment connectats: els vèrtexs estan units per un únic camí que va des d'un vèrtex fins a l'altre.
- Connectats de manera recursiva: aquesta connexió es dona quan els vèrtexs estan fortament connectats i el camí d'A a B utilitza els mateixos vèrtexs i arestes que el camí des de B a A.

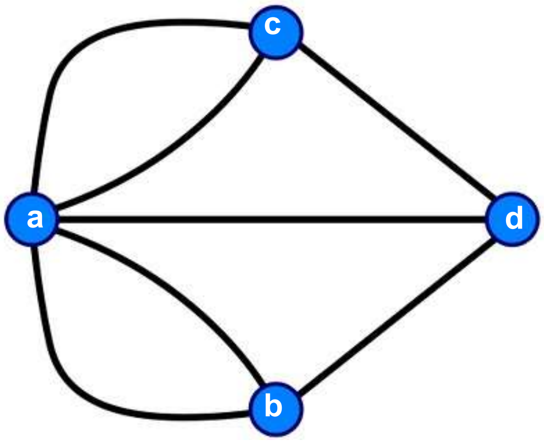
3.2. Història de la teoria de grafs

L'origen de la teoria de grafs neix l'any 1736 amb el plantejament del famós problema dels ponts de Königsberg (l'actual Kaliningrad). El problema el següent: aquesta ciutat comptava amb un riu que la dividia en quatre zones, tal

Imatge 8. Dues representacions del problema dels ponts de Königsberg. *Imatge extreta de https://www.bbvaopenmind.com/ciencia/matematicas/euler-problema-de-los-puentes-de-konigsberg/*

com es mostra a la imatge posterior. Per tal de no perdre la comunicació, hi havia set ponts que connectaven les diferents zones. Els ciutadans de Königsberg, que estaven molt orgullosos d'aquesta òptima connexió, es van plantejar la següent pregunta, que els servia com a entreteniment o joc: es poden travessar tots els ponts passant per cadascun d'ells un sol cop?

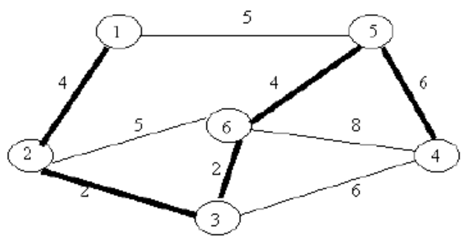
Al cap d'una estona provant possibles combinacions, pot semblar evident que és impossible, però per tal de demostrar-ho, cal donar una justificació matemàtica, tasca que va fer Leonhard Euler. El primer que va fer va ser simplificar el mapa mitjançant un graf. Cada zona seria un vèrtex, i cada pont es veuria representat per una aresta. D'aquesta manera, va obtenir l'esquema mostrat a la imatge 9. A més, Euler també parlarà de punt d'inici i punt de sortida per elaborar la seva demostració. Per exemple, suposem que *a* és el vèrtex d'inici i *b* és el vèrtex de sortida. La deducció és la següent: per poder recórrer aquest tipus de sistema, els vèrtexs del mig (els que no són el d'inici o el de sortida) han de tenir un nombre parell d'arestes, ja que necessiten una via per la qual entrar i una altra per la qual sortir. Per tant, els punts d'inici i sortida han de tenir un nombre senar de vies, ja que mai no sortirem del vèrtex de sortida i mai no entrarem al vèrtex d'inici. Per tant, l'esquema simplificat seria el següent: el recorregut hauria de sortir del punt de sortida (nombre senar de vies), entrar al punt del mig i sortir d'ell (nombre parell) i entrar en el punt de sortida (nombre senar). Aquest és l'esquema bàsic (suposant que només hi ha tres vèrtexs), però l'estructura és la mateixa per a qualsevol número de vèrtexs, amb la qual cosa també seria vàlid per al nostre cas. Si tornem al graf del nostre problema, veiem que necessitaríem dos vèrtexs amb un nombre parell d'arestes i dos vèrtexs amb un nombre senar, però no es dona aquest cas. Veiem que tots els vèrtexs tenen un nombre senar d'arestes, amb la qual cosa seria impossible trobar vèrtexs del mig (amb un nombre parell d'arestes). En el nostre cas, vam suposar que *a* era el vèrtex d'inici i *b* era el de sortida, i en aquest cas sí que tenen un nombre senar d'arestes, però si observem els vèrtexs restants, veiem que també en tenen un nombre senar, amb la qual cosa podem concloure que és impossible travessar tots els ponts passant un únic cop per cadascun d'ells.



Imatge 9. Graf del problema dels ponts de Königsberg. *Imatge extreta de https://aprendiendomatematicas.com/los-puentes-de-konigsberg/*

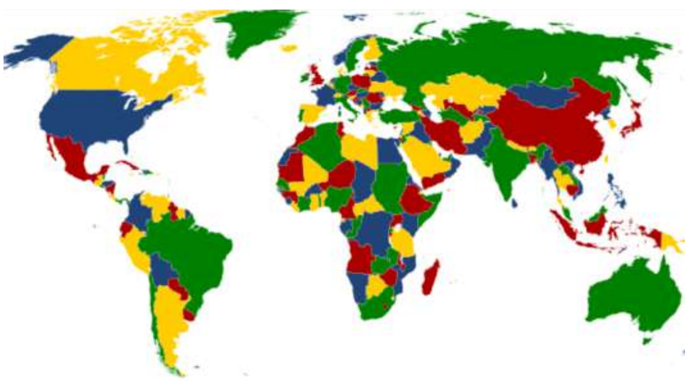
Malgrat això, aquesta demostració només planteja la possibilitat que el recorregut s'iniciés en un punt i acabés en un altre, però també cal tenir en compte que pot començar i acabar en el mateix vèrtex. En aquest cas, el vèrtex inicial seria també el de sortida, i el nombre d'arestes que arriben a ell hauria de ser parell: una per sortir i una altra per entrar. El nombre d'arestes que arriben a la resta de vèrtexs (vèrtexs del mig) també hauria de ser parell. Cap d'aquests casos es dona, amb la qual cosa s'ha demostrat que és impossible fer el recorregut plantejat a la pregunta. La solució a aquest problema per part d'Euler va suposar l'inici de la topologia.

Un altre punt memorable en la història de la teoria de grafs va tenir lloc l'any 1847 amb les investigacions de Gustav Kirchhoff, físic alemany que va aplicar aquesta teoria a l'anàlisi de xarxes elèctriques. Gràcies als grafs, aquest científic va poder proposar les seves lleis, aplicables per als circuits i que servien per calcular el voltatge i el corrent elèctric. Es va considerar la primera aplicació de la teoria de grafs al món de l'enginyeria. Amb referència als grafs, el teorema de Kirchhoff o teorema de l'arbre matriu de Kirchhoff tracta sobre els arbres d'expansió, que és un arbre compost per tots els vèrtexs i algunes de les arestes del graf *G* connex no dirigit. També el podem definir com al major nombre d'arestes de *G* que no contenen cicles o el mínim conjunt d'arestes que connecten tots els vèrtexs.



Imatge 10. La línia fosca és l'arbre d'expansió del graf. *Imatge extreta de https://users.dcc.uchile.cl/~raparede/clases/cc30a/00.2/tarea3/tarea3.html*

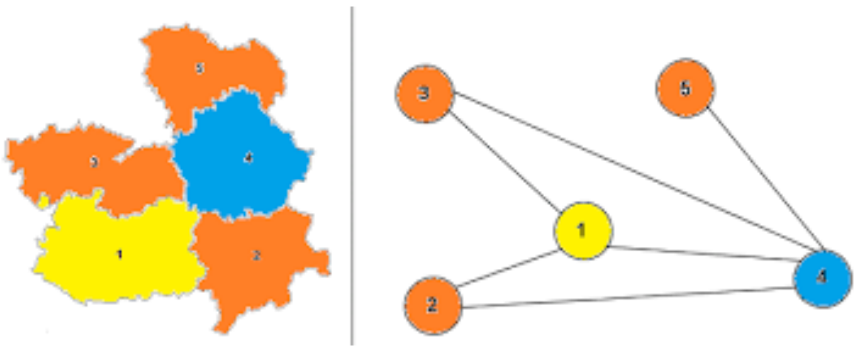
L'any 1852, Francis Guthrie, que era matemàtic i botànic, va plantejar el problema dels quatre colors, que afirmava que era possible pintar un mapa del món amb únicament quatre colors tenint en compte que els països veïns (és a dir, els contigus) no podien ser



Imatge 11. Solució al problema dels quatre colors. *Imatge extreta de https://www.revistac2.com/el-problema-de-los-cuatro-colores/*

pintats amb el mateix color. La història d'aquest problema és fascinant: Guthrie va veure mentre pintava un mapa dels comtats d'Anglaterra que només calien quatre colors per tal que dues regions contigües no estiguessin pintades d'aquest. Cal destacar que si les dues regions es toquen en un únic punt no es consideren contigües, han de compartir una frontera, un costat. Francis va parlar del tema amb el seu germà, Frederick, qui va plantejar la qüestió a un professor seu, Augustus de Morgan. Aquest no va poder contestar a la pregunta, però va encarregar-se de difondre-la. L'any 1878, Arthur Cayley va presentar formalment el problema a la *London Mathematical Society* i l'any 1879 Alfred Kempe va realitzar una demostració. Malgrat això, l'any 1890, Percy Heawood va trobar un error en aquesta, així que el problema va tornar a ser obert. L'any 1950, gràcies a l'ajuda dels ordinadors es van publicar grans avenços. Per exemple, Heinrich Heesch va publicar investigacions d'increïble importància sobre el tema, però les persones que van arribar a la veritable demostració van ser Kenneth Appel i Wolfgang Haken l'any 1976 amb l'ajuda dels ordinadors.

El complex problema pot ser simplificat mitjançant grafs tal com es mostra a la imatge 12.



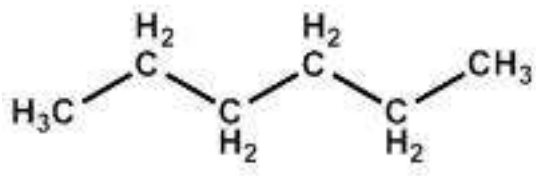
Imatge 12. Problema dels quatre colors amb grafs. *Imatge extreta de https://www.gaussianos.com/el-teorema-de-los-cuatro-colores-la-teoria-de-grafos-al-servicio-del-coloreado-de-mapas/*

Per tal de relacionar els mapes amb els grafs, cal destacar que a partir d'un mapa pla es pot crear el seu graf dual. Aquest consisteix en assignar un vèrtex a cada regió i unir-los amb arestes si les dues àrees són contigües.

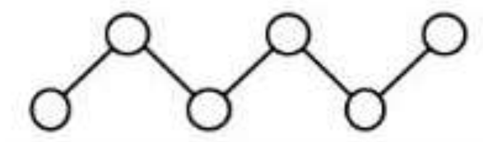
L'any 1857, Arthur Cayley, matemàtic britànic, va estudiar i resoldre el problema de com nombrar els isòmers mitjançant la teoria de grafs. Un isòmer és aquell compost que està format pels mateixos elements i en les mateixes proporcions que un altre compost, però que té propietats diferents a causa de divergències en l'estructura de la molècula (és a dir, els àtoms estan col·locats en un ordre diferent, i això fa que un compost tingui propietats físiques i químiques diferents a un altre). L'any 1811, el químic Joseph Gay-Lussac va observar que hi havia substàncies que tenien la mateixa composició química, però que els àtoms havien d'estar enllaçats de manera diferent. L'any 1823, el químic alemany Justus von Liebig, company de treball de Gay-Lussac, va demostrar que el fulminat de plata i el cianat de plata, que estaven formats pels mateixos compostos (un àtom de plata, un de carboni, un d'oxigen i un de nitrogen), tenien propietats molt diferents. Per exemple, el fulminat de plata era molt explosiu. A causa d'això, va semblar evident que la diferència havia de trobar-se en la manera en la qual els àtoms s'enllaçaven, és a dir, l'ordre. De fet, la fórmula del fulminat de plata és AgNCO, i la del cianat de plata és AgOCN. Paral·lelament, Jöns Jacob von Berzelius havia descobert que l'àcid racèmic i l'àcid tartàric semblaven tenir la mateixa fórmula ($G_4H_6O_6$), però diferien en propietats. Va ser Berzelius qui va decidir anomenar-los "isòmers".

Arthur Cayley, qui era un expert en teoria de grafs, va decidir combinar aquest aspecte de les matemàtiques amb la qüestió química, i va decidir resoldre mitjançant grafs el problema dels isòmers dels alcans. Un alcà és un tipus d'hidrocarbur (és a dir, està compost per carboni i hidrogen) que només presenta enllaços senzills. El carboni té un màxim de quatre possibles enllaços, mentre que l'hidrogen en té un. Si els carbonis s'enllacen a uns altres carbonis, ho faran mitjançant un enllaç senzill. A més, els alcans són compostos de cadena oberta, és a dir, els carbonis no s'uneixen els uns als altres per formar un cicle, sinó que es representen de manera lineal (és a dir, el primer carboni no estarà unit a l'últim carboni). Malgrat això, tota aquesta informació no se sabia, i el problema consistia en trobar una manera de nombrar totes les possibles combinacions.

Cayley va decidir assignar a cada compost alcà un graf (els vèrtex representarien els carbonis, les arestes serien els enllaços i els hidrògens serien omesos). A la imatge 13 veiem una de les representacions actuals dels alcans, mentre que a la imatge 14 podem veure la representació de Cayley mitjançant grafs.



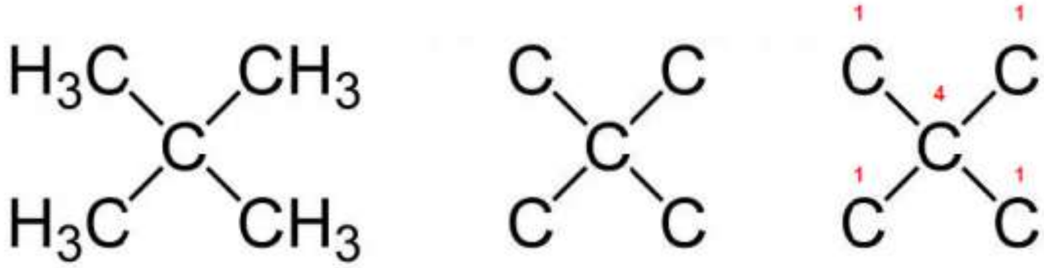
Imatge 13. Representació actual d'un compost alcà. *Imatge extreta de https://quimicasostenible.wordpress.com/2011/10/10/el-n-hexano-%C2%BFheroe-o-villano/*



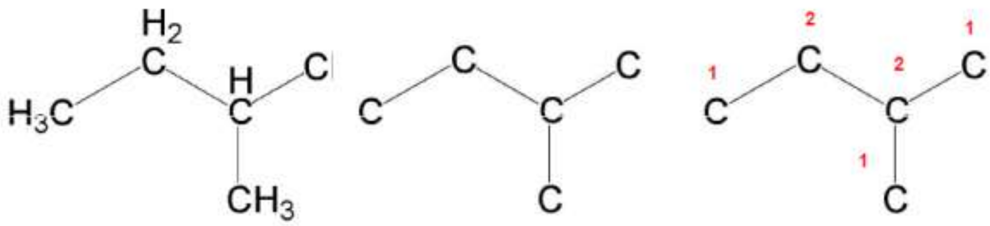
Imatge 14. Simplificació de Cayley. *Imatge extreta de https://programmerclick.com/article/3249852395/*

A partir d'aquesta simplificació, Cayley va determinar que la seva teoria depenia del nombre de centres que tenia l'alcà. Els centres són aquells àtoms de carboni que no són els extrems (per tant, en comptar els centres, s'han d'eliminar els vèrtex de grau 1, és a dir, els vèrtex on només incideix una aresta o els vèrtexs inicial i final). Cayley va demostrar que els grafs associats a alcans i que fossin isòmers només tenien vèrtexs de grau igual o menor a 4 (ja que, com hem esmentat prèviament, el carboni pot tenir quatre enllaços com a màxim, malgrat que aquest coneixement no es tenia en l'època de Cayley) i que només podien tenir un o dos centres.

Un exemple d'un parell d'isòmers és el cas del 2,2-dimetilpropà i del 2-metilbutà. Els dos compostos tenen cinc àtoms de carboni i dotze àtoms d'hidrogen, però estan distribuïts de diferent manera. Les imatges 15 i 16 mostren les representacions respectives d'aquests dos alcans. A més, també veiem representat el graf que s'associa a cada compost i el grau dels vèrtexs.



Imatge 15. Fórmula del 2,2-dimetilpropà (esquerra), representació com a graf (centre) i graus dels vèrtexs (dreta). *Imatge extreta de https://culturacientifica.com/2014/08/06/arthur-cayley-la-teoria-de-grafos-y-los-isomeros-quimicos/*



Imatge 16. Fórmula del 2-metilbutà (esquerra), representació com a graf (centre) i graus dels vèrtexs (dreta). *Imatge extreta de https://culturacientifica.com/2014/08/06/arthur-cayley-la-teoria-de-grafos-y-los-isomeros-quimicos/*

Malgrat això, podem diferenciar els dos alcans gràcies als descobriments de Cayley. Si tenim en compte els dos criteris per descriure isòmers que va proposar, veurem que els dos es compleixen. En ambdós casos, els vèrtexs sempre són de grau menor o igual que 4. A més, en el cas de la imatge 15, el graf té un centre (eliminem tots els vèrtexs de grau 1) i, en el cas de la imatge 16, el graf consta de dos centres, que, en aquest cas, serien els dos vèrtexs de grau 2. Així doncs, podem comprovar que no només es compleixen els criteris de Cayley, sinó que també ens permeten diferenciar entre dos isòmers.

Cayley va inventar dos algorismes per calcular el número d'isòmers de qualsevol compost. Primer de tot, cal saber que la fórmula per escriure un alcà és C_nH_{2n+2}, en la qual podem escollir el número de carbonis *n* que desitgem i el número d'hidrògens es calcula mitjançant la fórmula *2n + 2*. Malgrat això, la primera fórmula que Cayley va plantejar, que calculava el número d'isòmers coneixent *n*, només era vàlida per a *n* entre 1 i 11. La segona que va inventar servia per calcular el nombre d'isòmers per a *n* coneixent el nombre d'isòmers per a *n – 1*. La fórmula per calcular la quantitat d'àtoms de carboni i hidrogen per a *n – 1* seria $C_{n-1}H_{2n}$. Per a la demostració d'aquesta nova expressió cal tenir en compte que hem de substituir a la fórmula original (C_nH_{2n+2}) *n* per *n – 1*, tal com es mostra a continuació:

$$C_nH_{2n+2} \rightarrow C_{n-1}H_{2(n-1)+2}$$

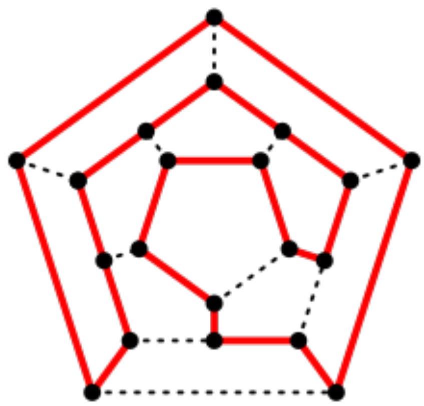
Ara només cal desenvolupar aquesta expressió aplicant la propietat distributiva al parèntesi i simplificar:

$$C_{n-1}H_{2n-2+2}$$

$$C_{n-1}H_{2n}$$

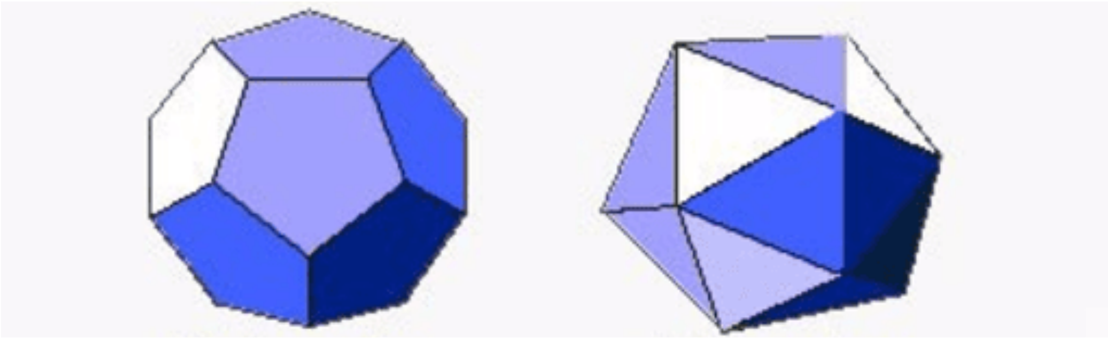
I d'aquesta manera podem obtenir l'expressió proposada. Encara que a l'actualitat existeixen altres mètodes per nombrar isòmers, la teoria de Cayley continua sent de molta utilitat i, per exemple, s'estima que l'alcà $C_{167}H_{336}$ compta amb més isòmers que partícules hi ha a l'univers.

L'any 1859, Sir William Hamilton va crear un joc relacionat amb la teoria de grafs conegut com "Joc Icosian". A partir de la figura mostrada a la imatge 17 (una projecció 2D dels vèrtexs i les arestes d'un dodecaedre), calia buscar un camí per tal de visitar un únic cop cada vèrtex i que el d'arribada fos el mateix que el de sortida. La solució del joc, també exposada a la imatge 17, forma un cicle hamiltonià. Inicialment, el problema estava basat en un dodecaedre, però el joc és conegut com "Joc Icosian" a causa de la seva aplicació a un icosaedre (el dodecaedre és un prisma regular de dotze cares



Imatge 17. Solució al Joc Icosian i exemple de cicle hamiltonià. *Imatge extreta de https://es.wikipedia.org/wiki/Juego_Icosian*

pentagonals, mentre que l’icosaedre és un prisma regular de vint cares triangulars, tal com es pot veure a la imatge 18).



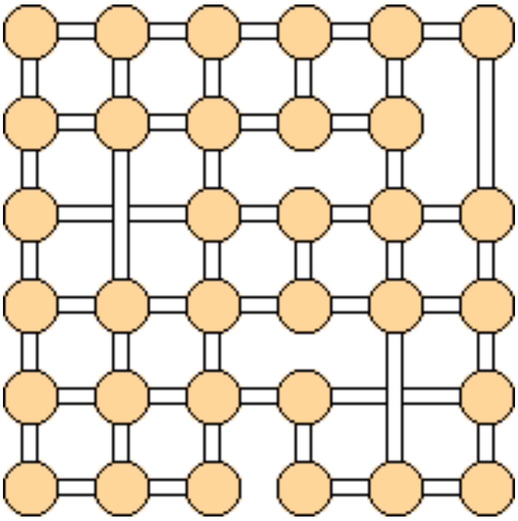
Imatge 18. Dodecaedre (esquerra) envers icosaedre (dreta). *Imatge extreta de https://www.geogebra.org/m/fNBM5xkZ*

A les imatges 19 i 20 podem veure dos diferents exemplars de taulers comercialitzats, encara que el primer representa la projecció 2D del dodecaedre i el segon és una versió tridimensional però no sencera (és a dir, el tauler no consisteix en un dodecaedre totalment).

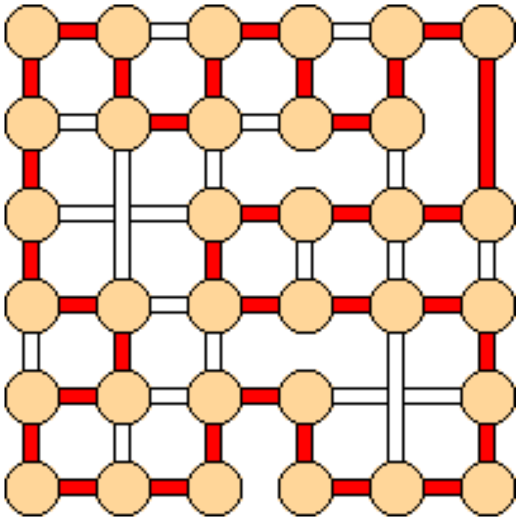
Imatge 19. Versió 2D del Joc. *Imatge extreta de https://www.jugamostodos.org/index.php/noticias-en-espana/en-los-medios/11096-juego-icosiano*

Imatge 20. Versió 3D del Joc. *Imatge extreta de https://www.jugamostodos.org/index.php/noticias-en-espana/en-los-medios/11096-juego-icosiano*

Hamilton va ser una gran inspiració per a altres matemàtics, com per exemple Erich Friedman, qui, a partir de l’any 2009, va començar a crear molts laberints hamiltonians. Un exemple de problema i la seva solució es pot veure a les imatges 21 i 22.



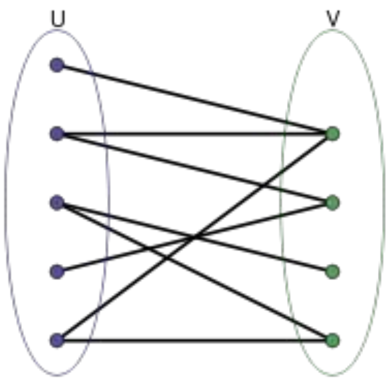
Imatge 21. Laberint hamiltonià. *Imatge extreta de https://www.jugamostodos.org/index.php/noticias-en-espana/en-los-medios/11096-juego-icosiano*



Imatge 22. Solució al laberint hamiltonià. *Imatge extreta de https://www.jugamostodos.org/index.php/noticias-en-espana/en-los-medios/11096-juego-icosiano*

L'any 1884, la paraula graf va començar a ser utilitzada. Prové de l'expressió anglesa "graphic notation", és a dir, "notació gràfica", que va ser creada pel químic Edward Frankland i posteriorment utilitzada per Alexander Crum Brown, ja que feia referència a la representació gràfica dels enllaços entre diferents àtoms a una molècula.

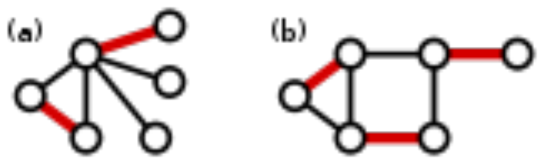
L'any 1936, el matemàtic Dénes König va escriure el primer llibre de la teoria de grafs, titulat *Teoria de grafs finits i infinits*. A més, aquesta figura va ser increïblement important al món dels grafs, ja que va ser ell qui va resoldre el teorema de König. Estableix una relació entre dos problemes, el màxim aparellament i el problema de cobriment de vèrtexs mínim en grafs bipartits.



Imatge 23. Exemple de graf bipartit. *Imatge extreta de https://es-academic.com/dic.nsf/eswiki/539559*

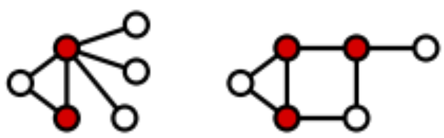
Un graf bipartit és aquell els vèrtexs del qual es poden dividir o separar en dos conjunts disjunts (és a dir, dos grups que no tenen cap element en comú, cap intersecció) i les arestes del qual sempre uneixen vèrtexs d’un conjunt amb vèrtexs de l’altre. Per exemple, a la imatge 23 veiem un exemple de graf bipartit. Els seus vèrtexs estan separats en els conjunts U i V, i les arestes sempre uneixen un vèrtex del conjunt U amb un del conjunt V, però mai no uneixen vèrtexs del mateix conjunt.

En teoria de grafs, un aparellament consisteix en seleccionar d’un graf un conjunt d’arestes independents (és a dir, arestes que no comparteixen cap vèrtex). El problema de l’aparellament màxim, en conseqüència, es basa en trobar dins un graf una combinació que contingui el màxim nombre d’arestes independents. A la imatge 24 hi ha tres exemples d’aparellaments màxims. En els tres casos es mostra una selecció d’arestes independents, i no trobaríem cap altra combinació amb la qual obtinguéssim un nombre major d’arestes.

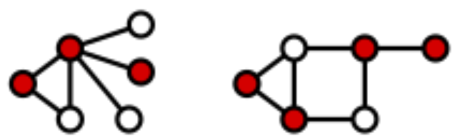


Imatge 24. Exemples d’aparellaments màxims. *Imatge extreta de https://es.wikipedia.org/wiki/Apareamiento_(teor%C3%ADa_de_grafos)*

D’altra banda, el cobriment de vèrtexs és un conjunt de vèrtexs seleccionats de manera que cada aresta incideix en algun dels vèrtexs seleccionats. El problema del cobriment de vèrtexs mínim consisteix en seleccionar el mínim nombre de vèrtexs possibles per tal que la condició prèviament esmentada es compleixi. A la imatge 25 hi ha dos exemples de cobriments de vèrtexs mínims. S’ha seleccionat el mínim número de vèrtexs possibles per tal que totes les arestes del graf siguin incidents en algun d’ells. A la imatge 26, en canvi, veiem els mateixos grafs que a la imatge 25, però no hem aplicat el cobriment de vèrtexs mínim, sinó un cobriment de vèrtexs normal (augmenta el nombre de vèrtexs).

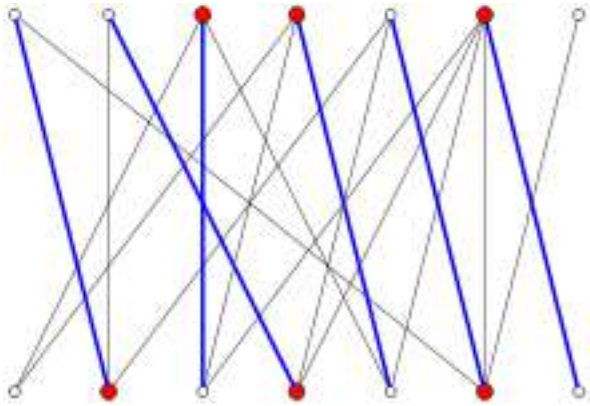


Imatge 25. Cobriments mínims. *Imatge extreta de https://es.wikipedia.org/wiki/Cobertura_de_v%C3%A9rtices*



Imatge 26. Cobriments de vèrtexs. *Imatge extreta de https://es.wikipedia.org/wiki/Cobertura_de_v%C3%A9rtices*

El teorema de König relaciona aquests dos problemes (aparellament màxim i cobriment de vèrtexs mínim), i afirma que, en un graf bipartit, el nombre d'arestes resultat d'un aparellament màxim és igual al nombre de vèrtexs resultat d'un cobriment mínim. A la imatge següent podem veure un exemple de graf sobre el qual s'ha aplicat el teorema de König: les arestes blaves són aquelles seleccionades segons el criteri de l'aparellament màxim, i els vèrtexs vermells són els que han sorgit d'aplicar el cobriment de vèrtexs mínim. El nombre d'arestes blaves és igual al nombre de vèrtexs vermells: sis.



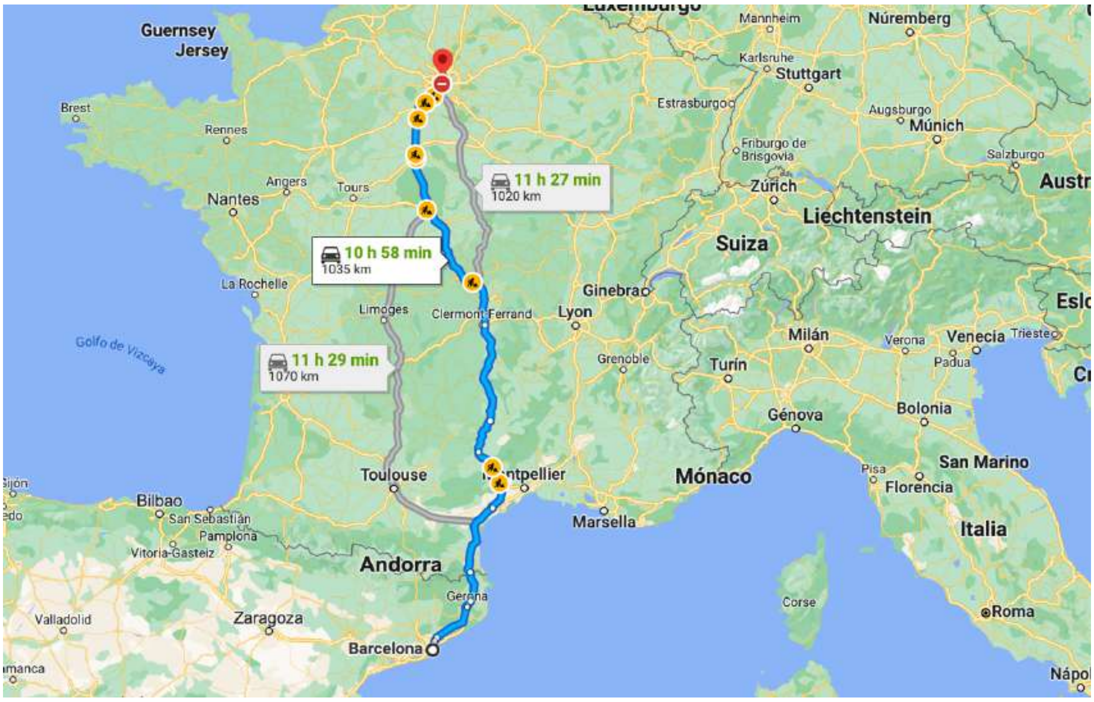
Imatge 27. Exemple de graf sobre el qual s'ha aplicat el teorema de König. *Imatge extreta de https://hmong.es/wiki/K%C5%91nig%27s_theorem_(graph_theory)*

També durant l'any 1936, el psicoanalista Kurt Lewin va crear una proposta en la qual afirmava que l'espai interior de qualsevol individu pot ser interpretat com a un mapa pla. Gràcies a aquesta comparació, altres psicoanalistes van poder utilitzar els grafs per a la interpretació psicològica d'una persona i el seu entorn. Dintre del graf, els vèrtexs serien les persones i les arestes, les relacions entre elles. Lewin afirmava que el comportament dels membres d'un grup i la pròpia estructura del grup es podien reduir a una simplificació del grup i l'entorn, cosa que va facilitar la traducció d'aquestes dades a grafs.

Entre els anys 1940 i 1950 la teoria de grafs va continuar desenvolupant-se i aplicant-se en estudis de la societat i anàlisi de xarxes de dades fins a convertir-se en el que avui dia coneixem.

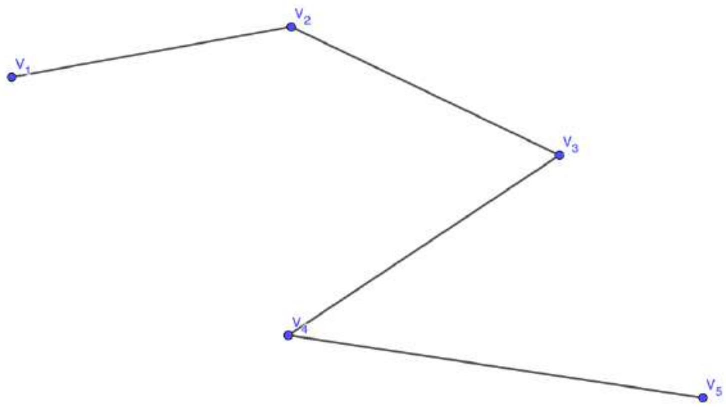
3.3. Problema del camí més curt

El problema del camí més curt consisteix a trobar un camí entre dos vèrtexs aconseguint que la suma del valor de les arestes (parlant d'un graf ponderat) o la distància sigui mínima. El camí més curt entre dos vèrtexs també rep el nom de geodèsica. Aquest problema pot presentar diverses solucions. Un exemple d'aplicació seria trobar el camí més curt per viatjar d'una ciutat a una altra. En aquest cas, els vèrtexs serien les ciutats i les arestes, les carreteres, el valor de les quals (o ponderació) seria el temps que es triga en travessar-les. Per exemple, aquests tipus de grafs els podem veure simplificats gràcies als GPS, tal com es mostra a la imatge 28.



Imatge 28. Camí més curt des de Barcelona fins a París. *Imatge extreta de https://www.google.es/maps/dir/Barcelona/Par%C3%ADs,+Francia/@45.4664244,0.0033931,6z/data=!4m14!4m13!1m5!1m1!1s0x12a49816718e30e5:0x44b0fb3d4f47660a!2m2!1d2.168568!2d41.3873974!1m5!1m1!1s0x47e66e1f06e2b70f:0x40b82c3688c9460!2m2!1d2.3522219!2d48.856614!3e0?hl=es*

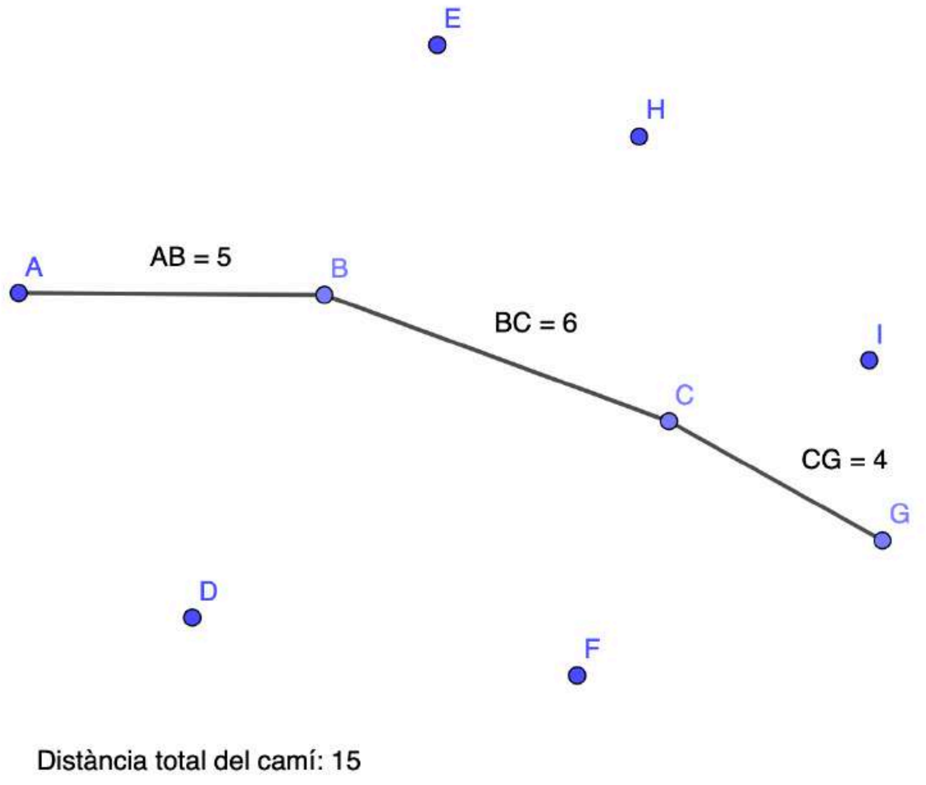
Cal destacar que aquest problema pot ser aplicable tant per a grafs dirigits com no dirigits (l'únic aspecte que canvia és que, en el cas dels grafs dirigits, els vèrtexs adjacents estan connectats per una aresta dirigida, és a dir, que indica el sentit). Tal com es va explicar prèviament, dos vèrtexs seran adjacents si comparteixen una aresta. La definició formal del problema consisteix en el següent: un camí en un graf és una seqüència de vèrtexs $P = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ que compleixen que cada vèrtex v_i és adjacent al vèrtex v_{i+1}, és a dir, cada vèrtex serà adjacent al següent (v_1 amb v_2, v_2 amb v_3, i així consecutivament). El camí *P* tindrà una longitud n-1 si va des de v_1 fins a v_n. Això vol dir que si tenim cinc vèrtexs (des de v_1 fins a v_5), la distància del camí serà 4 (5-1). El valor de la distància es correspon al nombre d'arestes, tal com podem veure a la imatge 29. Si anomenem a l'aresta que uneix dos vèrtexs v_i i v_j com a $e_{i,j}$ i un graf *G*, tenim dues possibilitats: la primera és que parlem d'un graf ponderat (amb valors associats a les arestes), i la segona és que el graf no sigui ponderat. En el primer cas, crearem una funció que representi cada aresta del graf, i l'expressarem de la següent manera: $f(e_{i,i+1})$. Aquesta funció fa referència a qualsevol aresta que està entre dos vèrtexs consecutius. Si a cada aresta (i, per tant, a la funció) li associem un valor, el problema del camí més curt es converteix en una suma que cal minimitzar i que de següent expressió:



Imatge 29. Graf de cinc vèrtexs i distància quatre. *Font pròpia*

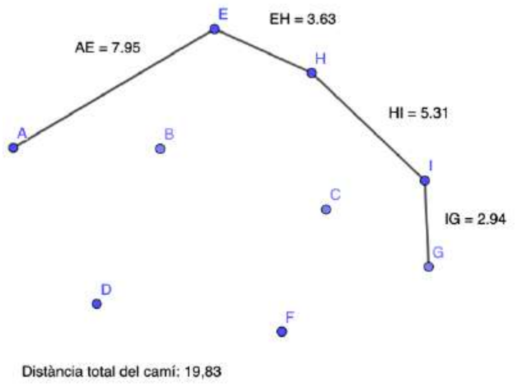
$$\sum_{i=1}^{n-1} f(e_{i,i+1})$$

El seu significat és el següent: suma els valors de totes les arestes que van des de la primera (com que el sumatori va des de i=1 fins a n-1, el primer vèrtex serà $v_i=v_1$) fins a l'última aresta que forma part del camí (prèviament vam dir que un camí que anés des dels vèrtexs v_1 fins a v_n tindria una longitud de n-1, que seria el número d'arestes que el formen, i és per aquest motiu que el nostre sumatori va des del primer vèrtex fins a n-1. Cal recordar que la distància té en compte les arestes, i amb aquesta expressió aconseguim delimitar l'última del camí). A continuació tenim una imatge que exemplifica aquesta teoria.

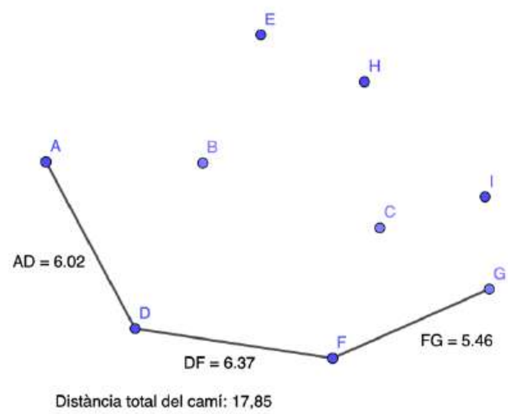


Imatge 30. Valor de la distància del camí. *Font pròpia*

En aquesta imatge s'ha realitzat l'operació esmentada. Hem sumat els valors de les arestes que formen part del camí, i aquest resultat es correspon al valor de la distància. Malgrat això, amb aquest mateix graf podríem escollir altres camins que tindrien altres distàncies, tal com podem veure a les imatges 31 i 32.



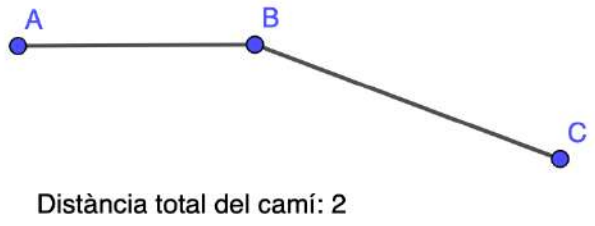
Imatge 31. Valor de la distància del segon camí. *Font pròpia*



Imatge 32. Valor de la distància del camí tercer. *Font pròpia*

El problema del camí més curt consistiria en minimitzar la distància. Per tant, en aquest cas, la solució al problema es trobaria a la imatge 30.

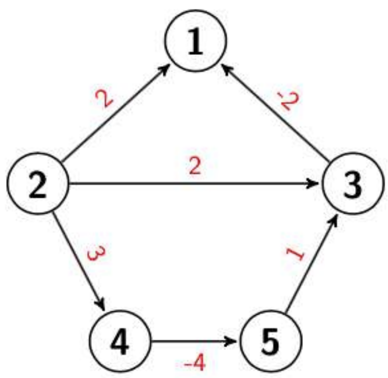
Malgrat això, cal recordar que aquesta explicació és aplicable per als grafs ponderats. En el cas dels grafs no ponderats, el camí més curt seria aquell que tingués menys arestes, ja que la distància del camí seria la suma de les arestes que el formen.



Imatge 33. Valor de la distància del camí en un graf no ponderat. *Font pròpia*

Hi ha diferents algorismes, és a dir, processos amb unes passes o instruccions determinades que cal seguir per obtenir un resultat, per calcular el camí més curt:

- Algorisme de Bellman-Ford: calcula el camí més curt entre dos vèrtexs, però el valor de les arestes pot ser negatiu.



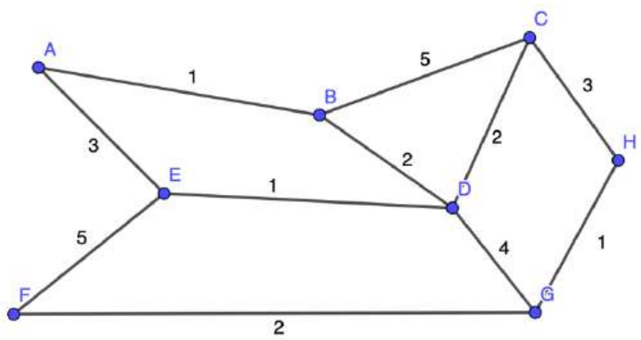
Imatge 34. Graf amb arestes amb valors negatius. *Imatge extreta de https://aprende.olimpiada-informatica.org/algoritmia-dijkstra-bellman-ford-floyd-warshall*

- Algorisme de Dijkstra: serveix per calcular el camí més curt des d'un únic vèrtex d'origen fins a tots els altres repetint el procés adequat.
- Algorisme de Floyd-Warshall: resol el problema entre tots els vèrtexs del graf.
- Algorisme de Viterbi: calcula el camí adequat tenint en compte factors relacionats amb la probabilitat i l'atzar.

- Algorisme de Johnson: resol el problema per a dos vèrtexs escollits i fins i tot pot ser més ràpid que l'algorisme de Floyd-Warshall si parlem de grafs de baixa densitat (és a dir, grafs en els quals pocs vèrtexs estan connectats a molts vèrtexs. Alta densitat seria si molts vèrtexs estiguessin connectats a molts vèrtexs).
- Algorisme de Recerca A*: calcula el camí més curt entre un parell de vèrtexs utilitzant certs mètodes per optimitzar el procés. Aquests mètodes són la recerca heurística, que analitza dades específiques del problema que van més enllà del propi enunciat. Aquesta recerca es pot utilitzar quan tenim dades sobre l'estructura de l'objecte d'estudi que serveixen per arribar a minimitzar costs i fer més efectiu el procés.

Un dels algorismes més coneguts és el de Dijkstra, que va ser creat per Edsger Dijkstra l'any 1959. Cal destacar que no pot ser utilitzat amb arestes amb valor negatiu, però és molt útil en el cas de problemes de transport. A continuació s'explicarà el seu funcionament amb un exemple.

Suposem que cada vèrtex de la imatge és una ciutat i cada aresta és la carretera. Estem parlant de grafs ponderats, ja que a cada aresta li associarem un valor (per exemple, el temps en minuts que es triga en anar d'una ciutat a una altra). El nostre graf quedarà tal com s'indica a la imatge 35.



Imatge 35. Graf. *Font pròpia*

Aquest algorisme, com que vol calcular el camí més curt des d'un vèrtex inicial fins a tots els altres, consistirà en etiquetar cada vèrtex de la següent manera:

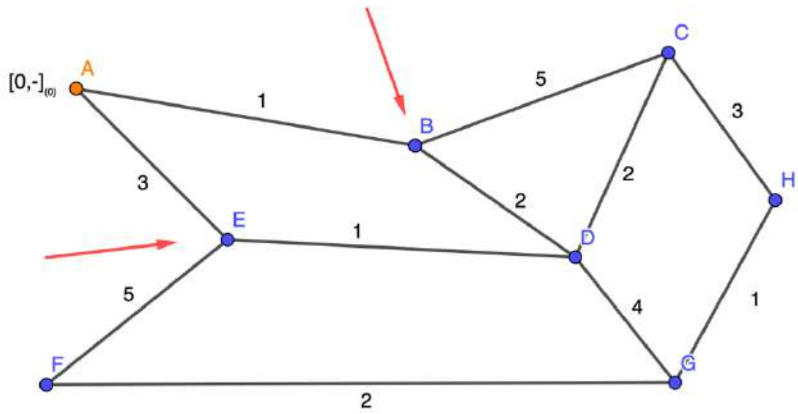
$$[d,A]_{(i)}$$

La lletra *d* farà referència a la distància acumulada (és a dir, la distància que hi ha des del primer vèrtex fins a l'actual). La lletra *A* fa referència al vèrtex predecessor o anterior (caldrà posar el vèrtex del qual venim). Entre els parèntesis posarem el nombre d'iteracions, és a dir, la quantitat d'arestes que hem recorregut des del vèrtex inicial fins a l'actual.

Primer de tot cal seleccionar el nostre primer vèrtex, que serà l'A. En posar-li l'etiqueta corresponent, veurem que té aquest aspecte:

$$[0,-]_{(0)}$$

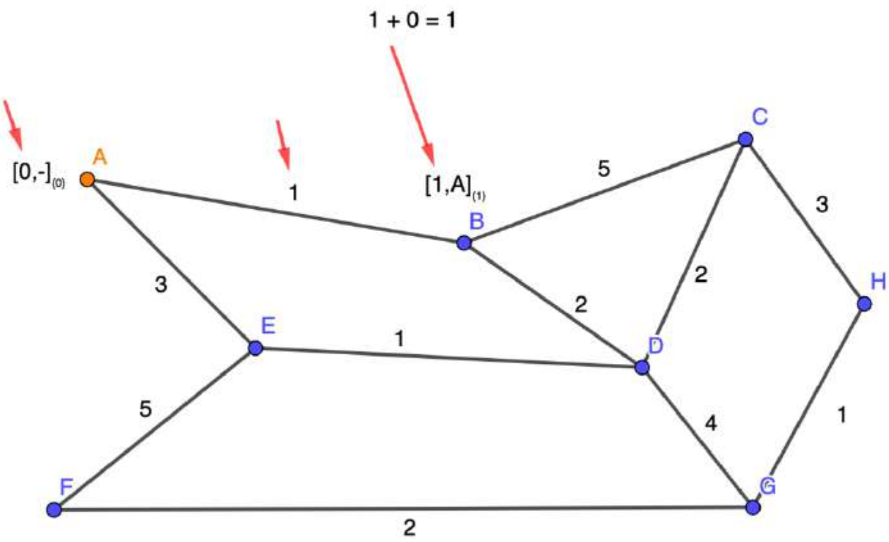
En la distància, com que és el nostre vèrtex inicial, cal posar 0, situació que es repeteix per a les iteracions (entre parèntesis). Com que és el primer vèrtex que hem seleccionat, tampoc no té cap vèrtex anterior, amb la qual cosa hi posem un guió. Ara que ja hem etiquetat el nostre vèrtex permanent cal etiquetar els altres que estan connectats amb ell mitjançant una aresta (en aquest cas, el B i l'E).



Imatge 36. Etiqueta del vèrtex A. *Font pròpia*

Començarem amb el vèrtex B. Per crear la seva etiqueta, primer ens fixarem en la distància acumulada. Per calcular-la, cal sumar el valor de l'aresta entre B i el vèrtex anterior (en aquest cas, A) i el valor de la distància que hem posat a l'etiqueta del vèrtex A (com que era 0, la suma de 0 i 1 és 1, amb la qual cosa aquest serà el valor de la distància per al vèrtex B). Després, cal posar el vèrtex anterior al B, que seria l'A, i, per últim, cal posar el nombre d'iteracions que hem realitzat (com que només hem fet un pas, el nombre que caldrà posar és 1). El resultat de l'etiqueta, per tant, és el següent:

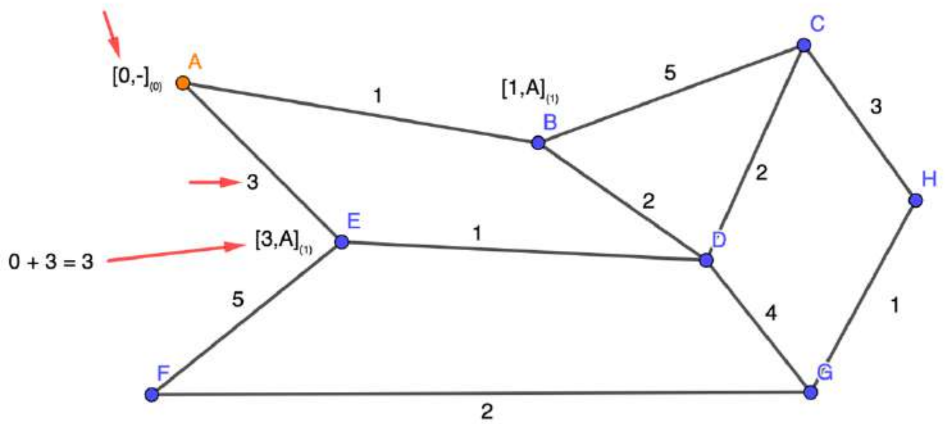
$$[1,A]_{(1)}$$



Imatge 37. Etiqueta del vèrtex B. *Font pròpia*

Ara cal fer el mateix amb E. La distància serà la suma de 0 i el valor de l'aresta (3), el vèrtex anterior és A i el nombre d'iteracions és 1, ja que des d'A fins a E només hi ha una aresta. L'etiqueta és la següent:

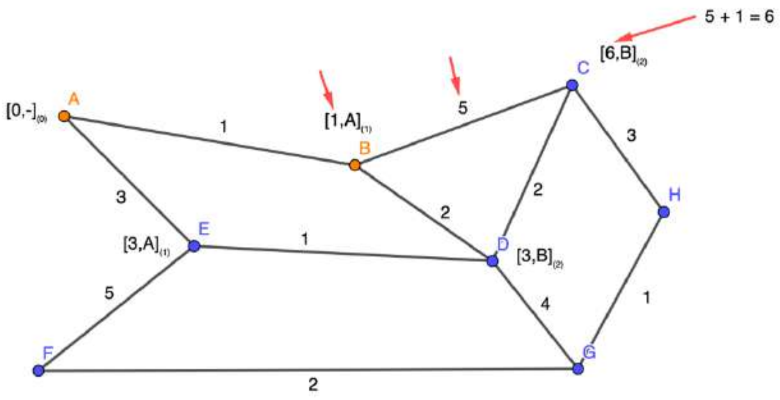
$$[3,A]_{(1)}$$



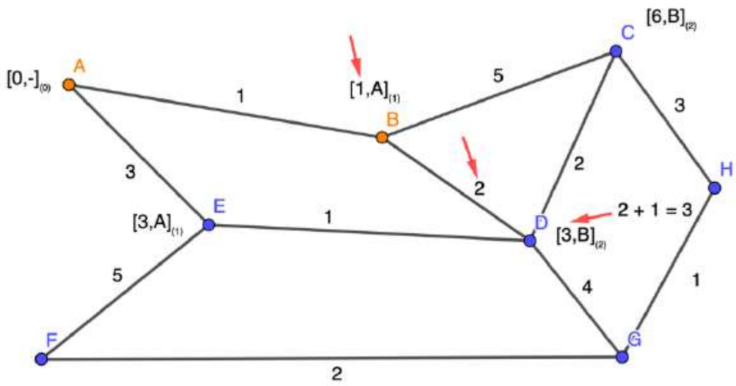
Imatge 38. Etiqueta del vèrtex E. *Font pròpia*

Ara, com que ja hem acabat d'etiquetar tots els vèrtexs adjacents a l'inicial o permanent, cal seleccionar un altre vèrtex permanent, que serà aquell amb una distància acumulada menor (en aquest cas, el vèrtex B). A continuació, hem de repetir el procés previ, és a dir, cal etiquetar els vèrtexs adjacents al B (el D i el

C). El vèrtex A no pot tornar a ser etiquetat a causa que ja és un vèrtex permanent.

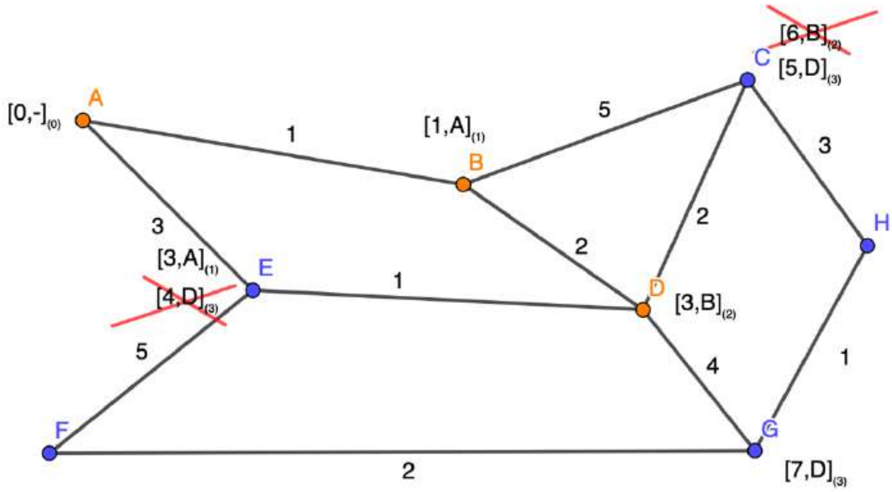


Imatge 39. Etiqueta del vèrtex C. *Font pròpia*



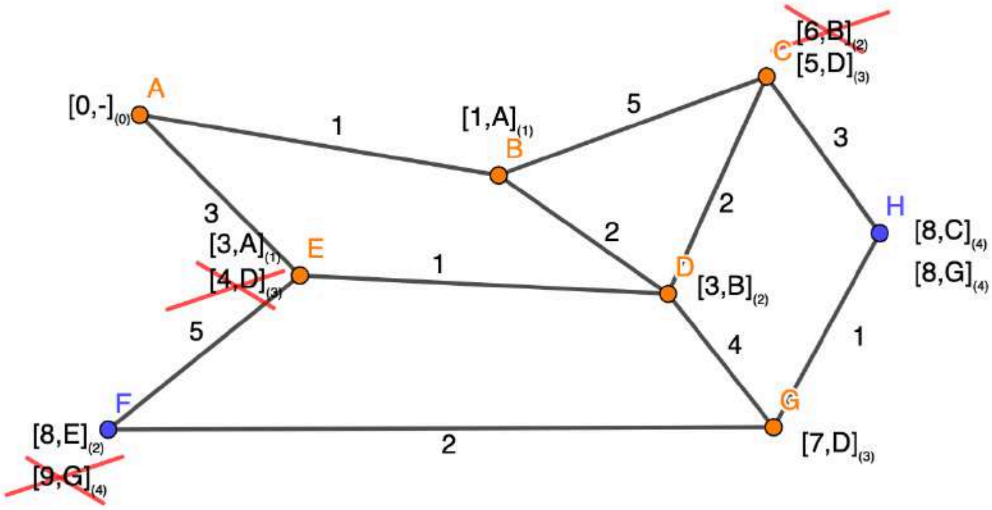
Imatge 40. Etiqueta del vèrtex D. *Font pròpia*

Ara que ja hem etiquetat els dos vèrtexs restants, cal escollir un altre vèrtex permanent, però hi ha dos que coincideixen en la mínima distància (el D i l'E). En aquest cas, s'escollirà un aleatòriament (per exemple, el D). Ara caldrà etiquetar els vèrtexs C, E i G. Els dos primers ja estan etiquetats, així que haurem de crear una nova etiqueta. Si la ruta que ens ofereix és més llarga, l'eliminarem, però si és més curta, descartarem l'altra opció. Tal com podem veure a la imatge 41, en el cas de C, l'etiqueta antiga que havíem creat té una major distància que la nova, amb la qual cosa no mostra el camí més curt i no és la que busquem. En el cas del vèrtex E, l'etiqueta nova té una major distància que l'antiga, amb la qual cosa també cal eliminar-la. Amb referència a G, hem creat la seva etiqueta.



Imatge 41. Etiqueta dels vèrtexs E, C i G. *Font pròpia*

Ara només cal repetir el procés. Primer farem permanent E i etiquetarem F. Després, fem permanent C i etiquetem H i, per últim, fem permanent G i etiquetem F i H. La distància de F no es pot millorar, així que tatxarem la nova etiqueta. Amb referència al vèrtex H, hem trobat una altra etiqueta amb la mateixa distància, cosa que significa que des del vèrtex A fins a H hi ha dos possibles camins òptims. El resultat del problema quedaria tal com podem veure a la imatge 42.



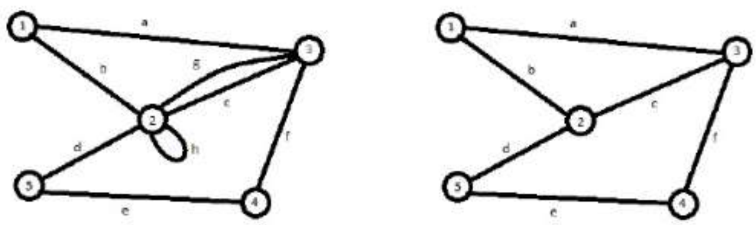
Imatge 42. Etiquetes de tots els vèrtexs. *Font pròpia*

Si volem traçar la ruta més curta entre A i G, per exemple, i ja tenim totes les etiquetes col·locades, només cal seguir el camí a la inversa. Si sabem que el vèrtex inicial era A i volem anar a G, començarem mirant l'etiqueta de G. Aquesta ens indica que prové de D, així que ens fixem en l'etiqueta d'aquest segon vèrtex. Veiem que prové de B, i B prové d'A, amb la qual cosa ja tenim el nostre camí més curt des d'A fins a G. Caldrà anar d'A a B, després a D i per últim a G.

3.4. Tipus de grafs

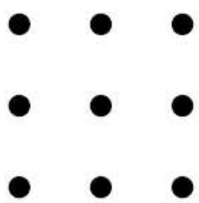
Hi ha diversos tipus de grafs, i alguns d'ells ja han estat prèviament esmentats, però en aquest apartat faré un recull dels tipus més utilitzats:

- Graf simple o graf: és aquell que té una aresta que uneix dos vèrtexs.
- Multigraf o pseudograf: té més d'una aresta entre dos vèrtexs. Aquestes arestes s'anomenen múltiples o llaços.



Imatge 43. Multigraf (esquerra) envers graf simple (dreta). *Imatge extreta de https://aprendeyprogramablog.wordpress.com/2016/07/04/grafos-parte-1/*

- Graf dirigit: les seves arestes tenen un sentit indicat gràficament per una fletxa.
- Graf no dirigit: és el cas contrari a l'anterior, ja que les arestes no estan orientades ni tenen cap sentit indicat.
- Graf nul: és aquell que no té vèrtexs ni arestes.
- Graf buit: graf que només té vèrtexs però que no té cap aresta.

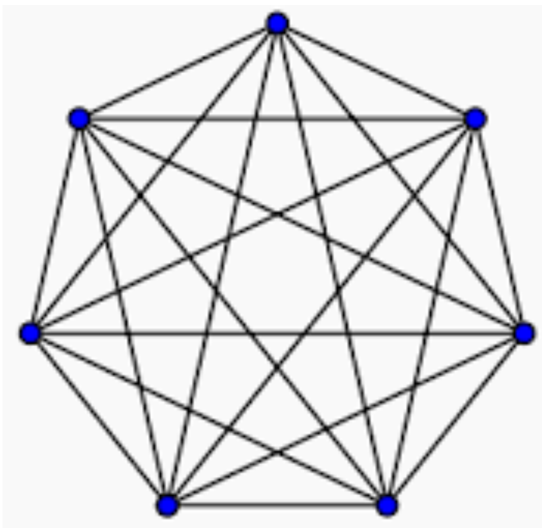


Imatge 44. Graf buit. *Imatge extreta de http://estructuradedatos2uninc a.blogspot.com/p/grafos-particulares.html*

- Graf trivial: és aquell que no té cap aresta i que té només un vèrtex o no en té cap. Si no té cap vèrtex, rep el nom prèviament esmentat de graf nul, i si en té un, rep el nom de graf singleton.
- Graf complet: és aquell graf simple en el qual cada parell de vèrtexs estan connectats per una aresta (dit d'una altra manera, cada vèrtex està connectat amb cada vèrtex). El nombre de vèrtex serà *n* i l'expressió per obtenir el nombre d'arestes és la següent:

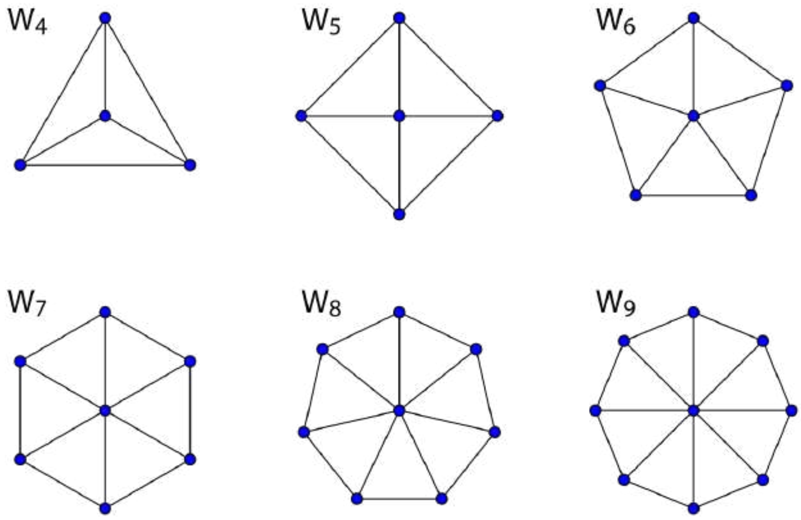
$$\frac{n\,(n-1)}{2}$$

  El nom del graf seguirà aquesta estructura: K_n. Per exemple, el graf K_7 tindrà 7 vèrtexs i serà el que veiem a la imatge 45.



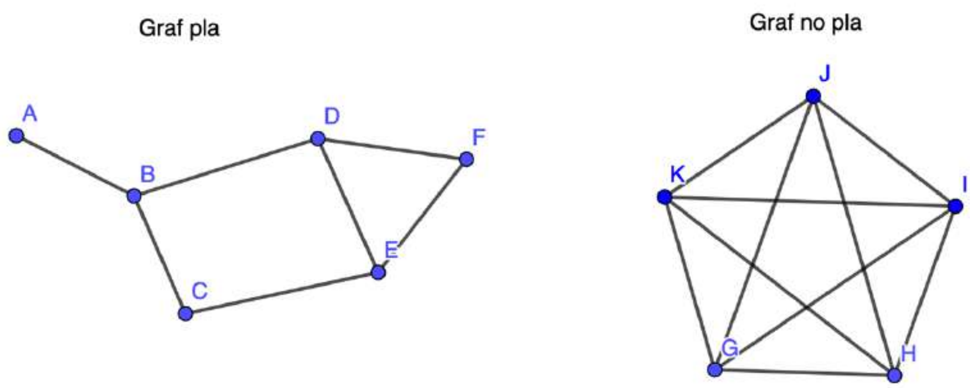
Imatge 45. Graf K_7. *Imatge extreta de https://dataestructureii.files.wordpres s.com/2015/11/grafos-particulares.pdf*

  L'única manera d'aconseguir que un graf complet sigui inconnex eliminant vèrtex seria eliminant-los tots.
- Graf bipartit: els seus vèrtexs es poden separar en dos conjunts o grups, i les arestes sempre uniran vèrtexs d'un conjunt amb vèrtexs de l'altre.
- Graf roda: és aquell graf que té *n* vèrtexs i que s'obté connectant un vèrtex a tots els altres, que formen part d'un cicle amb n-1 vèrtexs. Alguns exemples de grafs roda es poden veure a la imatge 46. S'anomenaran seguint l'estructura següent: W_n.



Imatge 46. Grafs roda W_4, W_5, W_6, W_7, W_8 i W_9. *Imatge extreta de http://estructuradedatos2uninca.blogspot.com/p/grafos-particulares.html*

- Graf pla: és aquell que pot ser dibuixat sense que hi hagi un encreuament d'arestes.



Imatge 46. Graf pla (esquerra) envers graf no pla (dreta). *Font pròpia*

- Graf acíclic: és aquell graf que no conté cap cicle (camí tancat i sense vèrtexs repetits a excepció de, possiblement, el primer i l'últim).
- Graf ponderat: és aquell que té valors associats a les arestes o als vèrtexs.
- Graf aleatori: les seves arestes tenen una probabilitat associada.
- Graf connex: hi ha un camí que uneix qualsevol parell de vèrtexs.
- Graf inconnex: cas contrari al graf connex.

3.5. Grafs i matrius

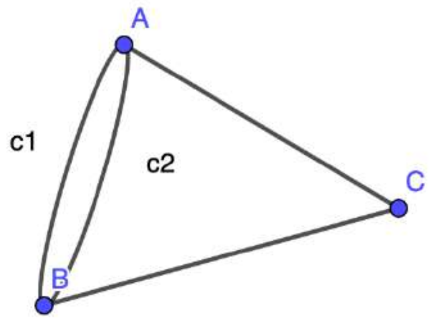
Els grafs es poden representar mitjançant matrius. Una matriu mxn és un conjunt de nombres ordenats en *m* files i *n* columnes, tal com podem veure a l'exemple a continuació.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

La matriu *A* és d'ordre 2x3, ja que té dues files i tres columnes. Per denominar algun element de la matriu, utilitzarem l'estructura a_{ij}, on *i* indicarà la fila en la qual està el nostre element i *j* serà la columna. Per exemple, en la matriu *A*, l'element a_{23} és el 0.

Pel que fa als grafs, la matriu d'adjacència d'un graf és aquella matriu quadrada (és a dir, que té el mateix nombre de files i de columnes) en la qual cada fila i cada columna es correspon a un vèrtex del graf, i cada element *ij* indica el nombre d'arestes entre el vèrtex *i* i el vèrtex *j*, però no a l'inrevés (el sentit sí que importa). Una matriu d'un graf rep el nom de matriu d'adjacència perquè indica quina és la relació entre vèrtexs adjacents.

Per exemple, escriurem la matriu al graf de la imatge 47.



Imatge 47. Graf. *Font pròpia*

Com que hi ha 3 vèrtexs, la matriu serà una matriu quadrada de 3x3. Cada fila i cada columna representarà un vèrtex, i tindrà un aspecte com aquest:

$$M = \begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\begin{array}{cccc} & \text{A} & \text{B} & \text{C} \\ & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \text{A} & \text{B} & \text{C} \end{array} \\ M = & \begin{pmatrix} a_{AA} & a_{AB} & a_{AC} \\ a_{BA} & a_{BB} & a_{BC} \\ a_{CA} & a_{CB} & a_{CC} \end{pmatrix} \begin{array}{c} \text{A} \\ \text{B} \\ \text{C} \end{array} \end{array}$$

Per tal de facilitar la lectura de la matriu, s'han afegit els vèrtexs que corresponen a cada element. Per exemple, l'element anomenat a_{AA} serà aquell que ens indiqui quants camins hi ha que vagin des del vèrtex A fins a ell mateix recorrent únicament una aresta, en aquest cas. Malgrat això, en la matriu no cal posar a sobre els vèrtexs corresponents als elements.

Començarem escrivint la nostra matriu fixant-nos en la imatge 47 i determinant, en primer lloc, quants camins d'una sola aresta ens porten des d'A fins a ell mateix. En aquest cas, la solució és 0, i l'escriurem a la matriu de la següent manera:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & a_{AB} & a_{AC} \\ a_{BA} & a_{BB} & a_{BC} \\ a_{CA} & a_{CB} & a_{CC} \end{pmatrix}$$

Continuarem amb el número d'arestes que ens guien des d'A fins a B. El resultat és dos, ja que podem arribar amb l'aresta c1 o amb la c2. Des d'A fins a C només hi ha un possible camí. Amb això, ja hem completat la primera fila de la matriu.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ a_{BA} & a_{BB} & a_{BC} \\ a_{CA} & a_{CB} & a_{CC} \end{pmatrix}$$

Ara, cal determinar el número d'arestes que van des de B fins al vèrtex A, des de B fins a ell mateix i, per últim, des de B fins a C. En el primer cas, el resultat és 2, ja que els possibles camins són c1 i c2 (tal com vam veure buscant el camí des d'A fins a B). En el segon cas, el resultat és 0 (no hi ha cap camí d'una aresta de B fins a B) i, en el tercer, 1.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ a_{CA} & a_{CB} & a_{CC} \end{pmatrix}$$

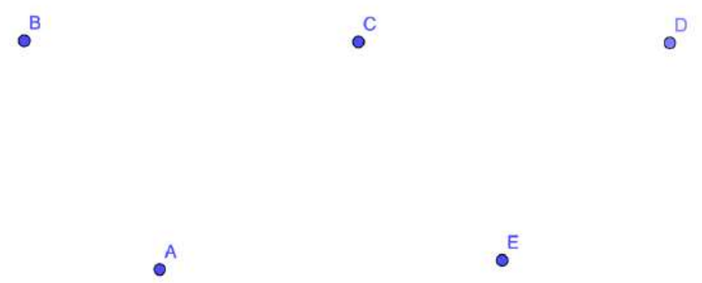
Des de C fins a A hi ha un possible camí, des de C fins a B n'hi ha també 1 i, per últim, des de C fins a C no hi ha cap camí possible d'una aresta. Per tant, la matriu corresponent a la imatge 47 quedaria tal com podem veure a continuació.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

També podem realitzar aquest procés a la inversa, és a dir, a partir d'una matriu podem obtenir un graf. Cal tenir en compte que una matriu pot tenir diversos grafs, però que un graf no pot tenir diverses matrius. A continuació, tractarem d'obtenir un graf a partir d'una matriu, però la solució que obtindrem no serà única. Suposem que tenim la matriu N.

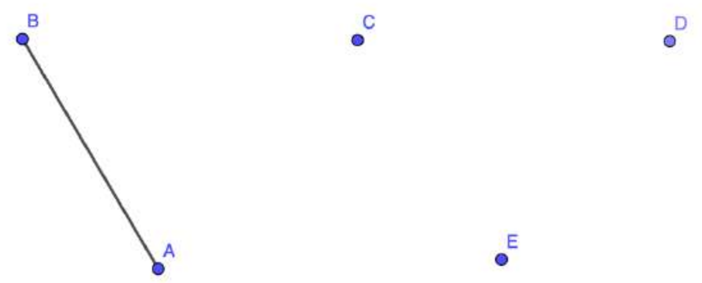
$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Primer, veiem que és una matriu de 5x5, així que el graf corresponent tindrà cinc vèrtexs, que representarem en posicions aleatòries.



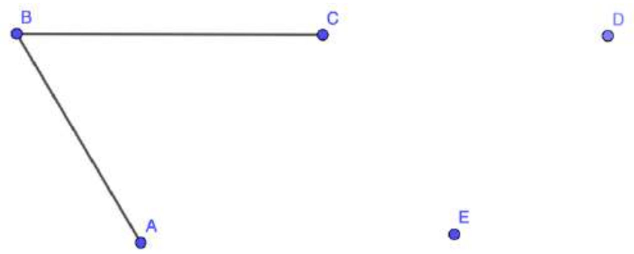
Imatge 48. Punts. *Font pròpia*

Ara mirarem la primera fila, que ens indicarà la relació del vèrtex A amb la resta de vèrtexs. Veiem que el primer element ens indica la connexió entre A i A, i com que el resultat és 0, no hi haurà cap aresta que connecti el vèrtex amb si mateix. Succeeix el mateix amb el vèrtex A amb C, D i E, però sí que hi ha una aresta entre A i B.



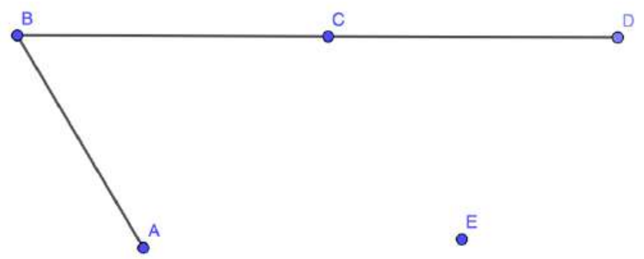
Imatge 49. Hi ha una aresta entre A i B. *Font pròpia*

Pel que fa a la segona fila, podem veure que el vèrtex B està connectat amb l'A (cosa que ja hem representat) i amb el C.



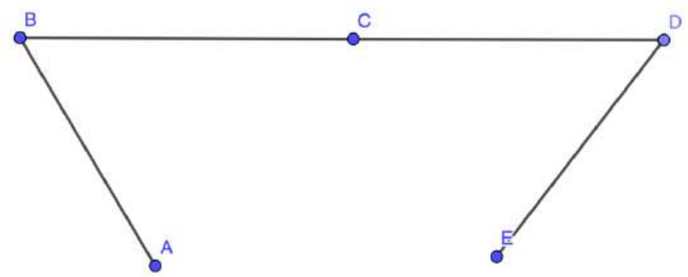
Imatge 50. Arestes que connecten B amb A i C. *Font pròpia*

Si ens fixem en la tercera fila, veurem que C comparteix una aresta amb B, que ja hem indicat, i una altra amb D.



Imatge 51. Arestes que connecten C amb B i D. *Font pròpia*

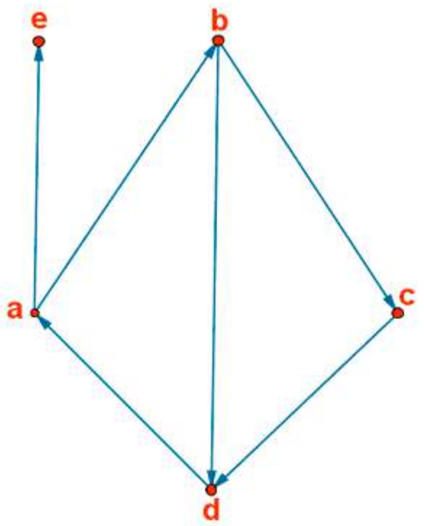
Ara mirarem la quarta fila, que es correspon al vèrtex D. Podem veure que D comparteix una aresta amb C (ja indicat) i una altra amb E. Finalment, si mirem l'última fila, que es correspon al vèrtex E, veurem que aquest comparteix una aresta amb D, cosa que ja hem indicat. Per tant, la representació del graf ha finalitzat.



Imatge 52. Graf finalitzat. *Font pròpia*

Tal com hem pogut veure amb els exemples anteriors, sempre que parlem de graf no dirigit hi haurà certa simetria, ja que l'aresta del vèrtex A cap a B és igual que la del vèrtex B cap a l'A. Malgrat això, aquest fenomen no es dona amb els grafs dirigits, ja que el sentit de la fletxa determinarà el camí. Si, per exemple, la fletxa va des de B fins al vèrtex A, hi haurà una connexió entre B i A, però no n'hi haurà cap entre A i B. És per aquest motiu que cal tenir en compte el sentit quan relacionem grafs i matrius.

Per exemple, a la imatge 53 veiem un graf dirigit i la seva corresponent matriu.

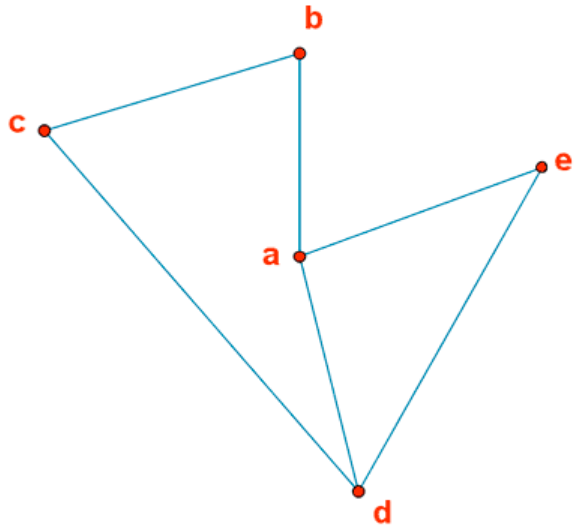


$$\begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Imatge 53. Graf i matriu d'adjacència. *Imatge extreta de https://calculo.cc/temas/temas_algebra/matriz/teoria/matriz_grafo.html*

Si ens fixem en els vèrtexs A i E podrem veure el següent: hi ha una aresta que comunica A amb E, tal com podem veure a la matriu (l'element a_{15} és un 1). Malgrat això, no hi ha cap aresta que comuniqui E amb A, amb la qual cosa l'element a_{51} de la matriu és un 0.

Fins ara, el tipus de matrius adjacents que hem vist consisteixen en anar des d'un vèrtex fins a un altre mitjançant una única aresta, però també es poden fer matrius en les quals el camí entre dos vèrtexs està composat per més d'una aresta. Per exemple, si volem indicar que el nostre camí contindrà dues arestes, el resultat serà el mateix que elevar la matriu de camí d'una aresta al quadrat. Per tant, en comptes d'anomenar-la *M*, l'anomenarem M^2. Si el nostre camí fos de tres arestes, anomenaríem a la matriu M^3, i així successivament. Podem veure aquesta explicació exemplificada a les imatges 54 i 55 (podem veure la matriu C, C^2 i C^3).



$$\begin{array}{c|ccccc} & a & b & c & d & e \\ \hline a & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ b & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ c & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ d & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ e & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

Imatge 54. Graf i matriu *C*. *Imatge extreta de https://calculo.cc/temas/temas_algebra/matriz/teoria/matriz_grafo.html*

$$C^2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad C^3 = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 & 6 & 4 \\ 5 & 0 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & 5 & 2 \\ 6 & 1 & 5 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

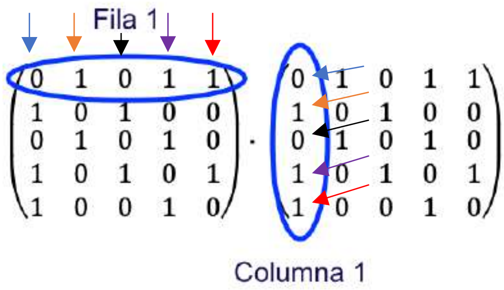
Imatge 55. Graf i matriu C^2 i C^3. *Imatge extreta de https://calculo.cc/temas/temas_algebra/matriz/teoria/matriz_grafo.html*

Per exemple, si ens fixem en la matriu C^2 i en l'element a_{11}, veurem que hi ha un 3 perquè des del vèrtex A fins a ell mateix hi ha tres rutes possibles que es poden seguir i que tinguin una longitud de dues arestes. La primera seria des d'A fins a E i un altre cop fins al vèrtex A. La segona seria A, B i A, i la tercera seria A, D i A. Podríem repetir aquest procés amb tots els elements de la matriu i veuríem que es correspondria perfectament amb la informació del graf.

Prèviament, hem esmentat que si parlem de la matriu C^2, malgrat que podem calcular-la manualment (tal com he explicat), també podem multiplicar la matriu C per ella mateixa.

$$C^2 = C \cdot C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La matriu C^2 serà també de 5x5. Per obtenir el primer element, a_{11}, caldrà multiplicar la primera fila (la 1) per la primera columna (la 1) de la següent manera: multiplicarem el primer element de la fila amb el primer de la columna i a això li sumarem la multiplicació del segon element de la fila amb el segon de la columna, i així successivament fins a haver multiplicat cada element de la fila amb cada element de la columna. En aquest cas, el càlcul de l'element a_{11} és el següent:



Imatge 56. Càlcul de l'element a_{11}. *Font pròpia*

$$a_{11} = 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 3$$

Per tant, el primer element de la matriu C^2 serà 3. Si ens fixem en la matriu C^2 de la imatge 55, el primer element també era 3.

Per a calcular l'element a_{12} cal repetir el mateix procés però amb la fila 1 i la columna 2. El càlcul seria el següent:

$$a_{12} = 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 = 0$$

Si fem el mateix amb la resta d'elements, veurem que els resultats obtinguts es corresponen amb els de la matriu de la imatge 55. Posaré un parell d'exemples.

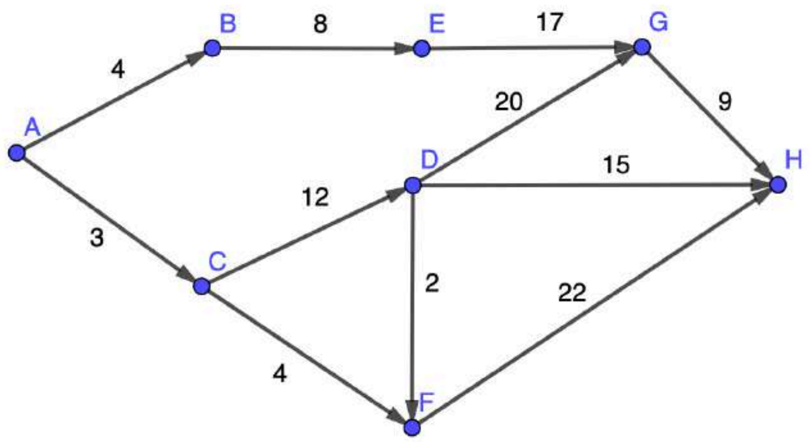
$$a_{13} = 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 2$$

$$a_{21} = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 = 0$$

Per tant, podem obtenir aquesta matriu tant de manera manual com multiplicant.

3.6. Optimització de grafs

Encara que els processos d'optimització de grafs per trobar el camí més curt es poden fer manualment, també hi ha certs programes informàtics que agilitzen els càlculs. Per exemple, es pot calcular el camí més curt mitjançant el programa Excel i, en particular, una eina seva anomenada Solver. En aquest cas, tractarem de trobar el camí més curt des del vèrtex A fins a l'H del graf que es mostra a la imatge 57.



Imatge 57. Graf. *Font pròpia*

El primer que cal fer es traduir el graf a una taula per tal que el programa pugui interpretar les dades. Una columna indicarà el vèrtex des del qual iniciem el moviment, l'altra columna indicarà el vèrtex al qual arribem i la tercera es correspondrà a la distància entre els dos vèrtexs. Cal escriure totes les combinacions de vèrtexs possibles. El resultat de la taula es pot veure a la imatge 58, encara que l'ordre de les combinacions pot ser diferent.

DES DE	FINS A	DISTÀNCIA
A	B	4
A	C	3
B	E	8
C	D	12
C	F	4
D	F	2
D	G	20
D	H	15
E	G	17
F	H	22
G	H	9

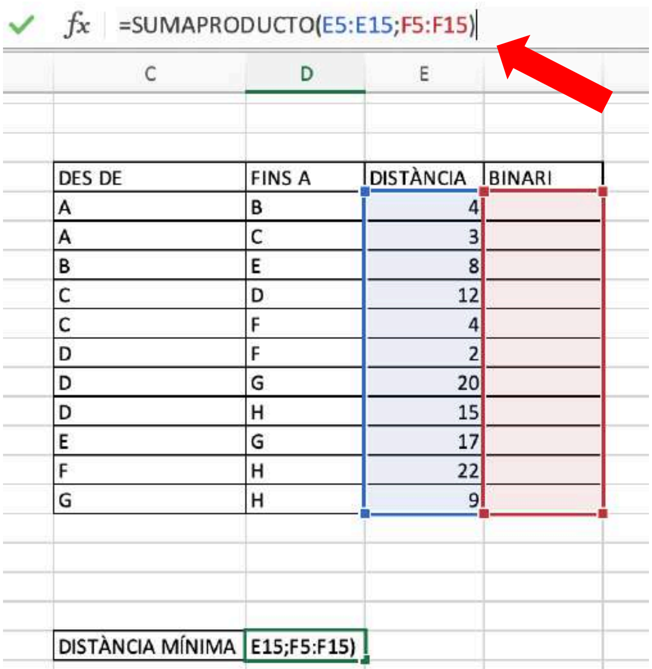
Imatge 58. Traducció del graf a una taula. *Font pròpia*

Encara que hem introduït totes les dades del graf, cal crear un espai per a què el programa indiqui quin serà el camí més curt. Per tal de fer això, crearem una quarta columna, anomenada "binari", que, de moment, deixarem buida (és a dir, adquirirà un valor de 0). En aquesta columna, posteriorment, el programa ens indicarà quina ruta cal seguir de la següent manera: posarà un 1 al costat del parell de vèrtexs pels quals hem de passar, i un 0 al costat dels quals no formen part de la ruta òptima. Per tant, la taula finalitzada quedaria com podem veure a la imatge 59.

DES DE	FINS A	DISTÀNCIA	BINARI
A	B	4	
A	C	3	
B	E	8	
C	D	12	
C	F	4	
D	F	2	
D	G	20	
D	H	15	
E	G	17	
F	H	22	
G	H	9	

Imatge 59. Taula finalitzada. *Font pròpia*

Les variables de la columna “binari” seran les que el Solver canviarà, però cal crear una casella amb una fórmula perquè pugui ser optimitzada. En aquest cas, volem trobar la distància mínima, així que crearem un espai amb aquest nom. Per tal de poder optimitzar-lo, cal escriure una fórmula que indiqui el camí. En aquest cas, utilitzarem les columnes “distància” i “binari”. Multiplicarem cada número de la primera amb cada número de la segona i sumarem tots els resultats. D’aquesta manera indicarem el camí ideal, ja que el programa assignarà el número 1 a cada fila que formi



DES DE	FINS A	DISTÀNCIA	BINARI
A	B	4	
A	C	3	
B	E	8	
C	D	12	
C	F	4	
D	F	2	
D	G	20	
D	H	15	
E	G	17	
F	H	22	
G	H	9	

DISTÀNCIA MÍNIMA	E15;F5:F15)

Imatge 60. Fórmula per calcular la distància. *Font pròpia*

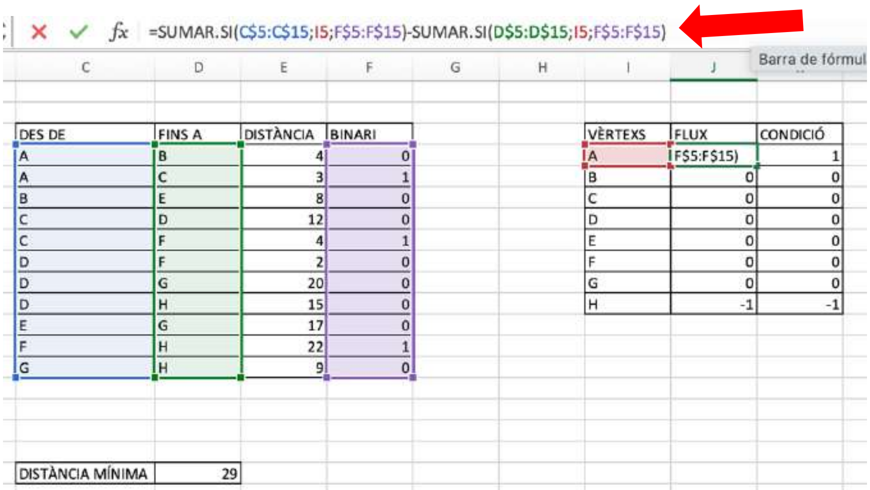
part del camí més curt. En multiplicar la distància per 1, obtindrem el valor de la distància, i després aquest resultat se sumarà a les altres distàncies que formen part del camí ideal. Com que les distàncies innecessàries tindran assignat un 0, en multiplicar el seu valor per 0, el resultat s'anul·larà i és d'aquesta manera que seleccionarem les distàncies adequades i les sumarem al total. La fórmula es pot veure a la imatge 60. De moment el resultat és 0, ja que no hem posat cap valor a la columna de binari i totes les distàncies s'estan multiplicant per 0 i sumant. Per tant, el resultat d'aquesta operació és 0.

Ara cal crear una altra taula per indicar que A és el vèrtex de sortida i H és el destí o vèrtex d'arribada. En aquesta taula, primer de tot, escriurem tots els vèrtexs que formen part del nostre graf. Un cop ja hem fet això, cal crear un parell de columnes més. La primera s'anomenarà "flux" i, posteriorment, hi escriurem una fórmula que ens indicarà la variació de moviment a mesura que canviem de vèrtex. La segona columna, anomenada "condició", serà la que determinarà el vèrtex de sortida i el d'arribada. Cada cop que sortim d'un vèrtex, li assignarem el valor 1, però si hi entrem, li assignarem el valor de -1. En el vèrtex de sortida, en aquest cas, l'A, posarem un 1. Pel que fa a els vèrtexs del mig, hi ha dues possibilitats. La primera és que no passem per un determinat vèrtex, amb la qual cosa li posarem un 0. La segona és que si hi passem, però això significa que entrarem (valor 1) i sortirem (valor -1) del vèrtex. Com que el resultat de la suma d'1 i -1 és 0, aquest és el valor que haurem d'assignar al vèrtex. En ambdós casos (tant si passem pel vèrtex del mig o no), haurem d'assignar un valor de 0. Finalment, amb referència al vèrtex de destí o d'arribada, com que només hi entrem però no sortim del vèrtex, hem d'assignar-li un valor de -1. De moment, la taula queda tal com es mostra a la imatge 61.

VÈRTEXS	FLUX	CONDICIÓ
A		1
B		0
C		0
D		0
E		0
F		0
G		0
H		-1

Imatge 61. Taula per establir les condicions de cada vèrtex. *Font pròpia*

Ara, cal escriure les fórmules necessàries a les caselles de flux. Aquesta columna ha d'estar relacionada amb l'altra taula. Cada vegada que posem un 1 i un 0 a la columna de binari, estarem canviant el nostre recorregut i la nostra posició al graf, i això ha de reflectir-se a la columna de flux. Si, per exemple, a la columna de binari poso un 1 a la primera casella (des d'A fins a B), ara ja haurem sortit d'A i haurem entrat en B. Per tant, a la columna de flux hauria de posar-se automàticament un 1 al costat d'A que indiqués la sortida i un -1 al costat de B que indiqués l'entrada. Per tal d'establir aquesta relació, utilitzarem una suma condicional.



DES DE	FINS A	DISTÀNCIA	BINARI
A	B	4	0
A	C	3	1
B	E	8	0
C	D	12	0
C	F	4	1
D	F	2	0
D	G	20	0
D	H	15	0
E	G	17	0
F	H	22	1
G	H	9	0

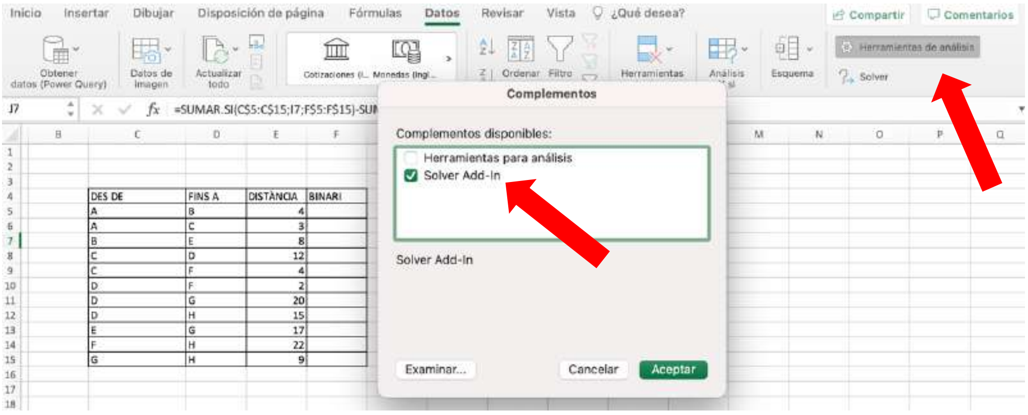
VÈRTEXS	FLUX	CONDICIÓ
A	F$5:F$15)	1
B	0	0
C	0	0
D	0	0
E	0	0
F	0	0
G	0	0
H	-1	-1

DISTÀNCIA MÍNIMA	29

Imatge 62. Fórmula per a la columna "flux". *Font pròpia*

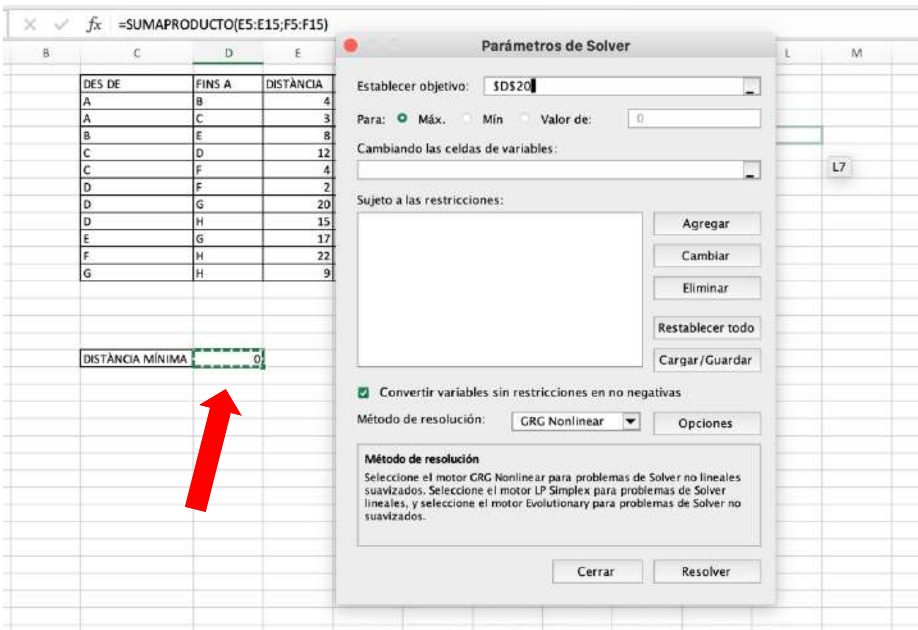
El significat de la fórmula és el següent: cal fer una suma de la columna "binari" (aquesta columna està marcada en lila) tenint en compte que només podem agafar els elements de la columna "des de" (de color blau) que continguin una A (element de color vermell, és el criteri que establim, la condició). A aquest resultat cal restar-li la suma de tots els elements de la columna "binari" que continguin la lletra A a la columna "des de". El motiu pel qual fem la primera suma és perquè si a la columna "binari" hi ha un 1 indicant que sortim des del vèrtex A, en aquest cas, el flux haurà de canviar i passar a ser un 1. Posteriorment, fem una resta, i el motiu és que aquesta resta indicarà el moment en el qual arribem al vèrtex A. Cal que sigui una resta perquè d'aquesta manera el flux es representarà amb un -1. Pel que fa a la programació de la fórmula, he col·locat el signe "$" entre la lletra i el número de les cel·les perquè copiaré aquesta fórmula a les altres caselles de la columna "flux" i vull que aquestes seleccions es mantinguin fixes. Malgrat això, el criteri (és a dir, l'opció de color vermell) no compta amb aquest signe perquè no ha de mantenir-se igual. Per a la casella de sota, el criteri no serà la lletra A, sinó que serà la B, i així successivament.

Un cop ja hem finalitzat totes les columnes necessàries, ja podem programar l'eina de Solver. Cal anar a l'apartat de "Dades" de l'Excel i, si el Solver no està afegit com a eina, cal afegir-lo a l'apartat anomenat "Eines d'anàlisi".



Imatge 63. Cal afegir l'eina "Solver". *Font pròpia*

Un cop ja afegida aquesta eina, apareixerà sota l'apartat "Eines d'anàlisi". A continuació, hem de col·locar-nos sobre la cel·la de distància mínima i prémer l'eina de Solver. Sortirà una finestra que ens indicarà els paràmetres del programa.

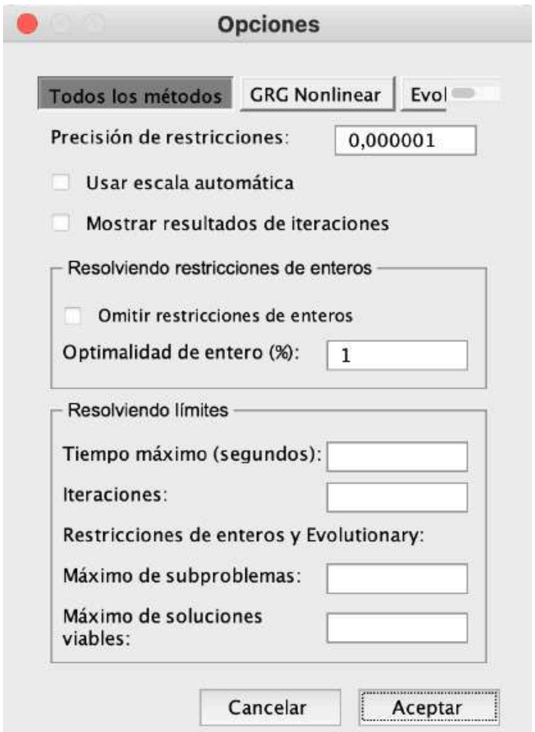


Imatge 64. Obrim el Solver. *Font pròpia*

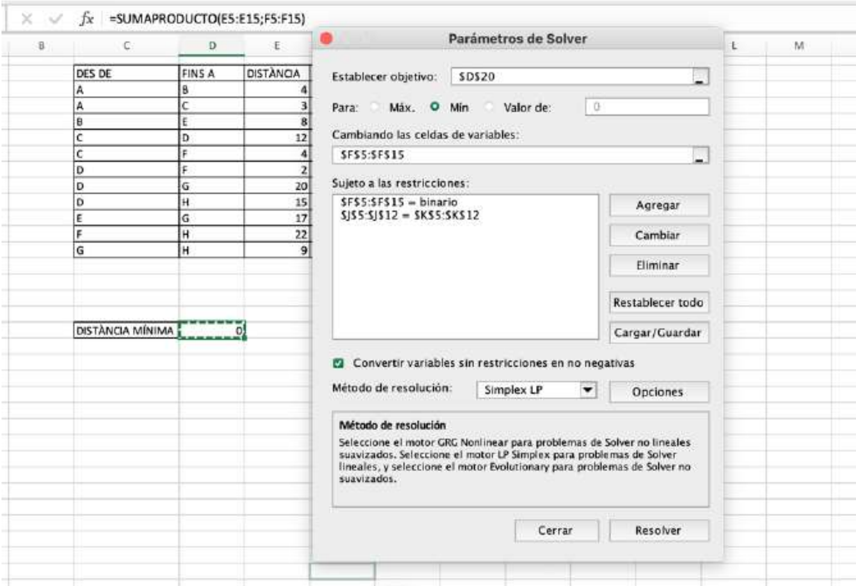
Ara cal configurar els paràmetres. Primer de tot, com que volem optimitzar la fórmula de distància mínima per obtenir el menor resultat, cal seleccionar l'opció "Mín". En la casella que indica les cel·les de variables cal seleccionar la columna de "binari". En les restriccions, que és el quadre de sota, cal afegir-ne dues. La primera és que la columna de "binari" només pot acceptar valors binaris (0 i 1). La segona restricció és que la columna de "flux" ha de ser igual a la columna de "condició". Per últim, cal seleccionar el mètode de resolució "Simplex LP", que és l'adequat per al tipus de fórmules que nosaltres plantegem i, en l'apartat d'opcions cal desmarcar la casella "ometre restriccions d'enters", ja que, si no, el programa introduiria valors decimals en comptes de 0 i 1 únicament. Finalment, cal seleccionar "resoldre" i apareixerà una altra finestra, en la qual cal seleccionar "acceptar". Fet això, ja haurem optimitzat la distància mínima i els valors de la columna binari s'hauran seleccionat automàticament per indicar quin és el camí més curt. A la casella "distància mínima" veurem indicat el valor de la distància del camí més curt. El resultat de la configuració finalitzada es pot veure a la imatge 68, i l'optimització i el camí més curt és poden veure a la imatge 69.

Imatge 65. Restricció de binari. *Font pròpia*

Imatge 66. Restricció de la columna flux. *Font pròpia*



Imatge 67. Apartat d'opcions. *Font pròpia*



Imatge 68. Configuració finalitzada. *Font pròpia*

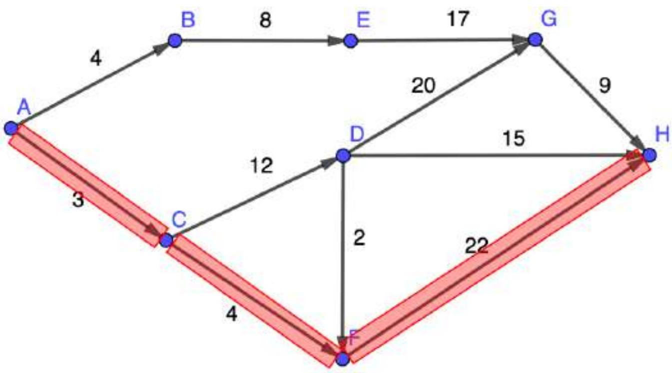
DES DE	FINS A	DISTÀNCIA	BINARI
A	B	4	0
A	C	3	1
B	E	8	0
C	D	12	0
C	F	4	1
D	F	2	0
D	G	20	0
D	H	15	0
E	G	17	0
F	H	22	1
G	H	9	0

VÈRTEXS	FLUX	CONDICIÓ
A	1	1
B	0	0
C	0	0
D	0	0
E	0	0
F	0	0
G	0	0
H	-1	-1

DISTÀNCIA MÍNIMA	29

Imatge 69. Optimització finalitzada. *Font pròpia*

Gràcies a aquests resultats, podem veure que la distància més curta és de 29 unitats i el camí que cal seguir és aquell que es mostra a la imatge 70 (surt del vèrtex A i passa pels vèrtexs C i F fins arribar a l'H).

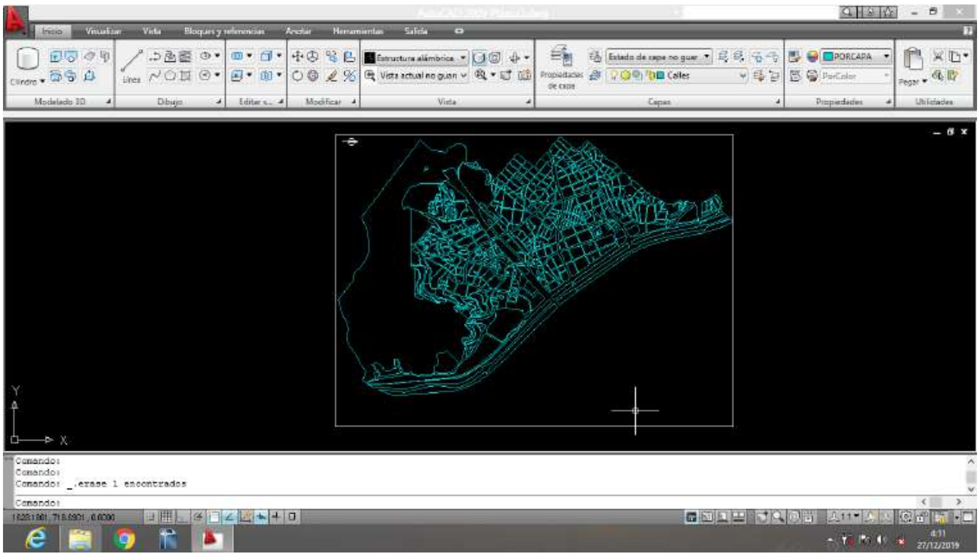


Imatge 70. Camí més curt. *Font pròpia*

4. LA XARXA D’AUTOBUSOS DE SANTA COLOMA DE GRAMENET

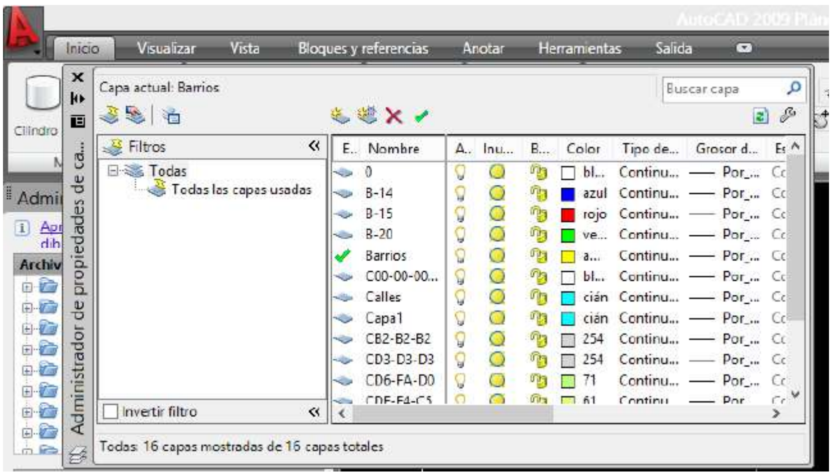
4.1. Xarxa actual d’autobusos de la ciutat

Per realitzar l’estudi de les parades, el procés que he seguit ha estat el següent: primer, m’he descarregat el plànol de Santa Coloma de Gramenet del Cadastre en versió PDF. A continuació, l’he transformat a DWG, que és el format que llegeix l’AutoCAD i, com que la transformació té defectes, he aprofitat el contorn dels carrers per resseguir-los i crear un nou mapa, tal com es pot veure a la imatge 71.



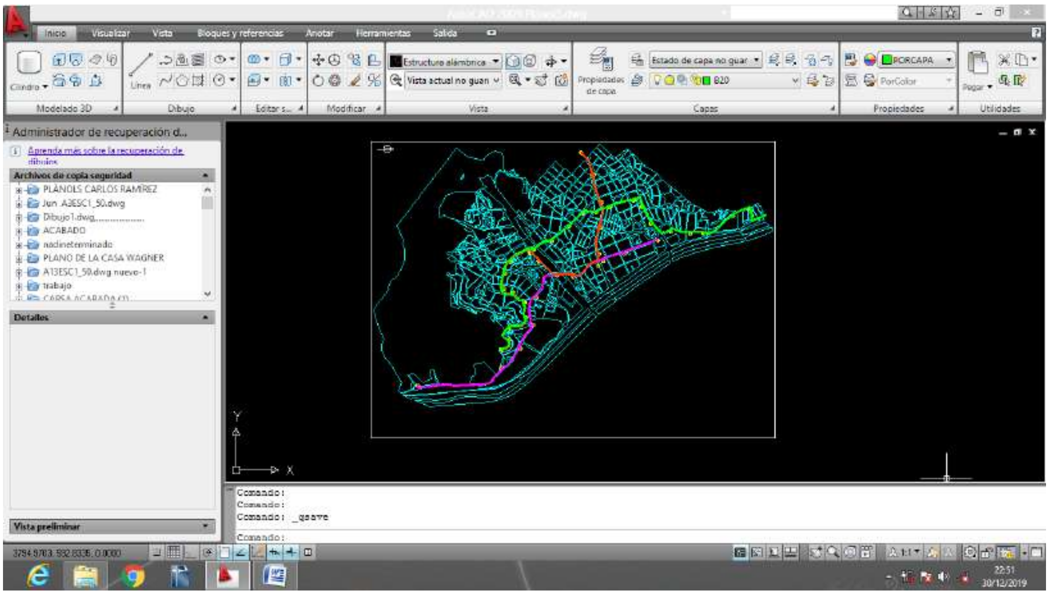
Imatge 71. Plànol retocat de Santa Coloma de Gramenet. *Font pròpia*

A continuació, per tal de representar les diferents parades d’autobús i les línies, he creat una capa per a cada línia i una capa per a totes les parades, tal com es pot veure a la imatge 72.

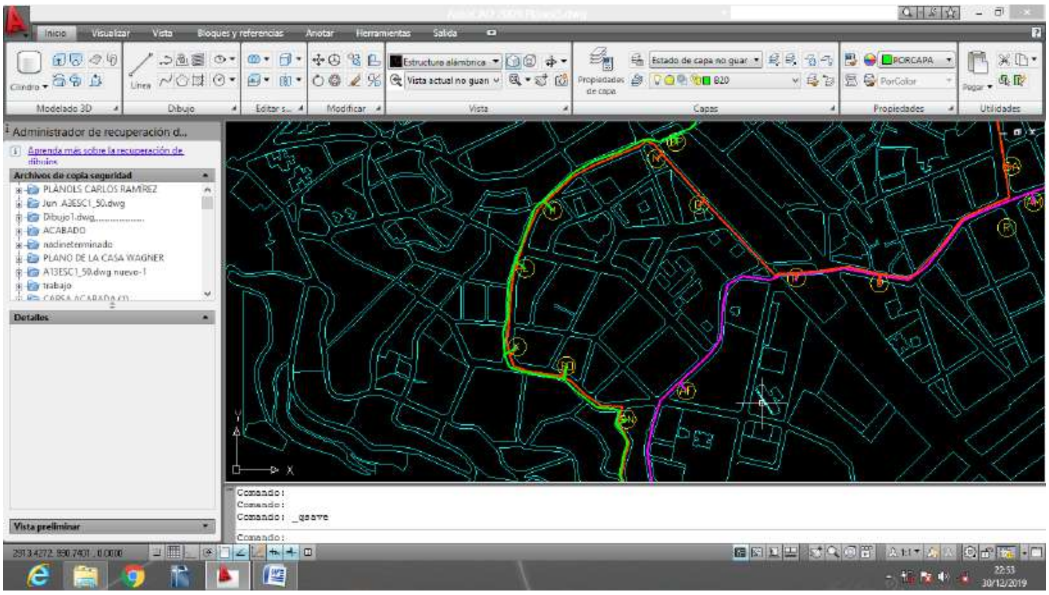


Imatge 72. Capes per a les línies i les parades. *Font pròpia*

Un cop ja estan creades les capes, he dibuixat el recorregut de cada línia a la seva capa corresponent, i he detallat si diverses línies comparteixen parada.

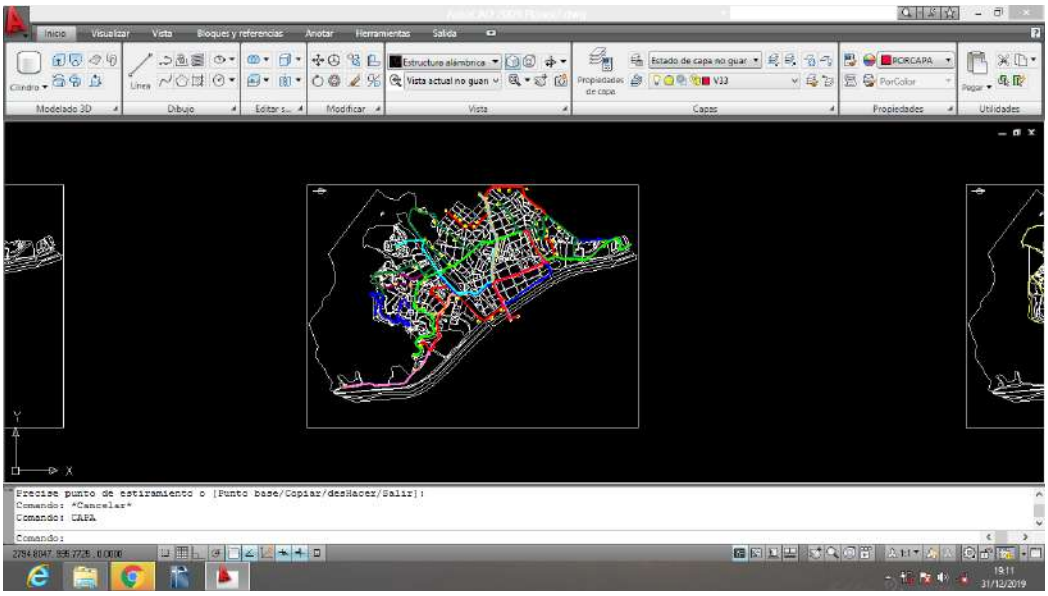


Imatge 73. Procés de representació del recorregut de les línies. *Font pròpia*



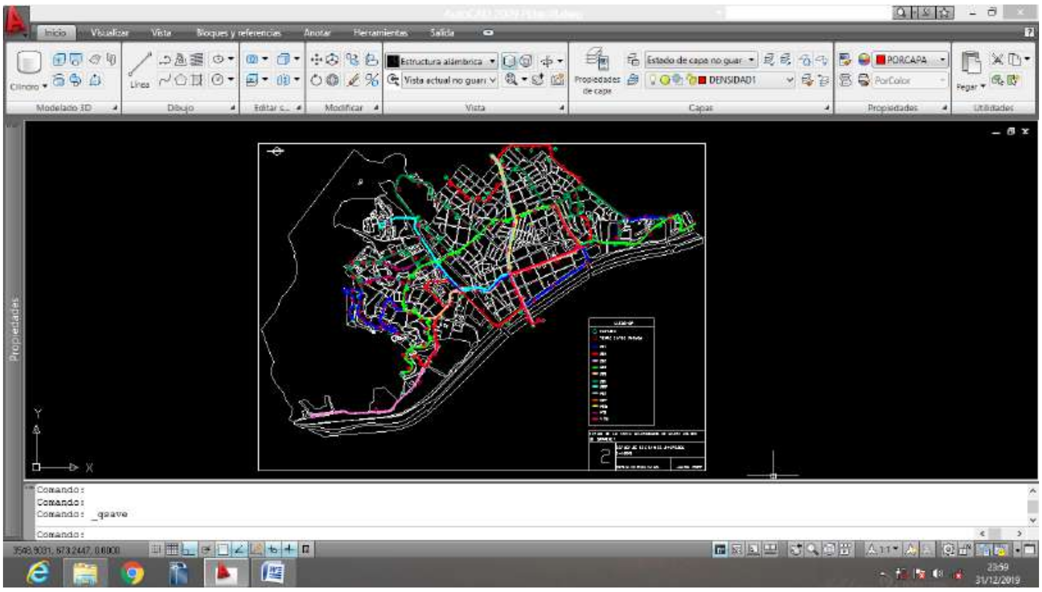
Imatge 74. Parades compartides per diverses línies. *Font pròpia*

A la imatge 75 podem veure el resultat de totes les línies dibuixades.



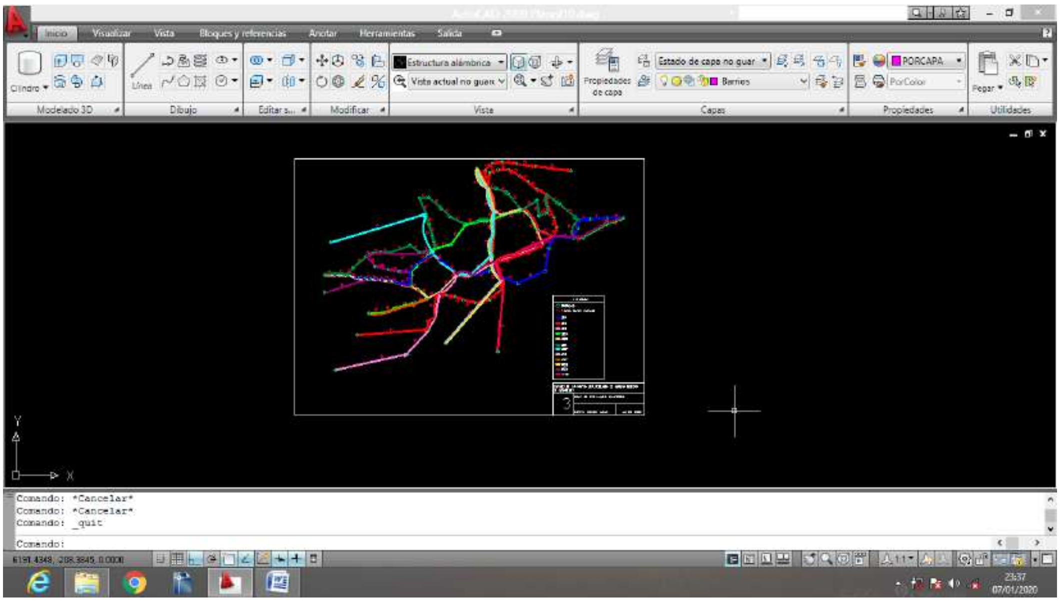
Imatge 75. Totes les línies representades. *Font pròpia*

A continuació, he posat els temps entre les diferents parades en una altra capa.



Imatge 76. Temps de cada recorregut entre parada i parada. *Font pròpia*

Finalment, he simplificat el mapa creant el seu graf corresponent per tal de, posteriorment, poder realitzar l'optimització.



Imatge 77. Graf de les parades actuals. *Font pròpia*

4.2. Densitat de la població

A continuació exposaré l'estudi que he dut a terme sobre els barris de Santa Coloma de Gramenet. Per poder calcular la densitat de població, m'he basat en les dades publicades per l'Ajuntament del Pla Local per a la Inclusió Social del 2004. Després d'obtenir aquestes dades, vaig calcular mitjançant un mapa del Cadastre i l'aplicació AutoCAD la superfície de cada barri i, amb tota aquesta informació vaig poder calcular una aproximació de densitat de població. L'objectiu d'aquest estudi és determinar quins barris consten amb major part de la població per tal d'establir una distribució de parades d'autobús òptima.

Segons el cens municipal, la població l'any 2021 de Santa Coloma de Gramenet ha estat de 119.289 habitants. Per tal de comunicar la ciutat entre diferents punts i amb les altres ciutats (Barcelona i les seves àrees metropolitanes), la ciutat consta de línia de metro (dues parades de la línia 1 i cinc parades de la línia 9 Nord) i de la xarxa d'autobusos de les empreses Tusgsal (16 autobusos en diürn) i TMB (1 autobús en diürn). En la taula posterior es pot veure el recull d'informació relacionat amb l'àrea dels barris, els habitants, la densitat de població i les parades.

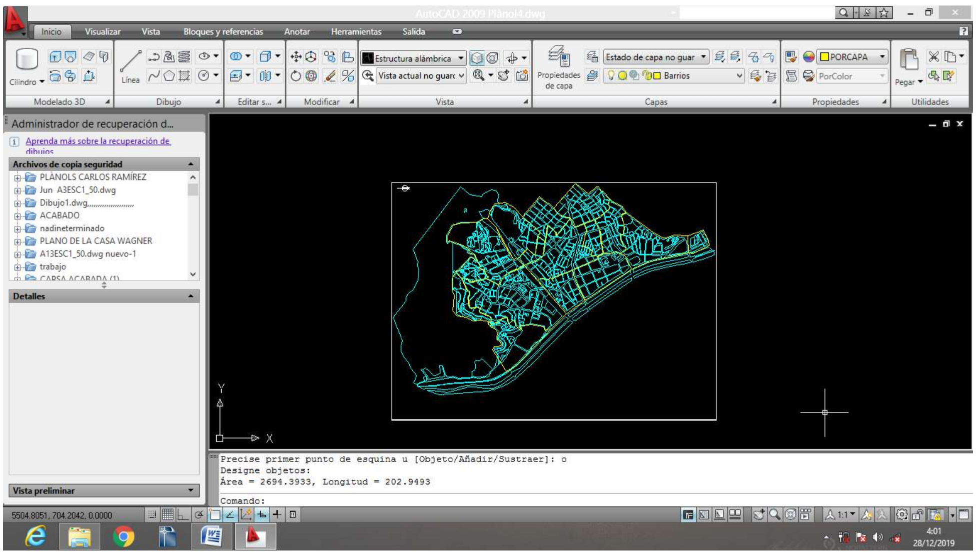
Districte	Barri	Àrea	Habitants	Densitat de població (hab / ha)	Parades	Parades / Àrea (parades / ha)
Districte 1	Centre	626.351	16.732	267,7	7	0,113
	Can Mariner	134.778	7.621	568,7	0	0
Districte 2	Cementiri Vell	90.443	1.335	148	1	0,111
	Llatí	268.017	9.907	369,7	5	0,187
	Riera Alta	459.884	2.003	43,5	7	0,152
Districte 3	Can Franquesa	218.881	1.335	61	8	0,365
	Can Calvet	652.479	1.921	29,5	4	0,062
	La Guinardera	232.535	1.988	85,5	3	0,131
	Les Oliveres	979.605	3.318	33,9	8	0,082
	Singuerlín	820.385	9.862	120,2	16	0,195
	Serra Marina	123.006	998	81,2	5	0,417
Districte 4	Riu Nord	288.322	7.964	275,6	4	0,138
	Riu Sud	423.440	14.755	348,8	7	0,116
Districte 5	Safaretjos	96.998	1.128	117,5	1	0,104
	Raval	552.755	8.113	147	15	0,273

	Santa Rosa	307.577	13.998	456	6	0,195
Districte 6	Fondo	404.950	16.311	403,7	6	0,15

Per tal de calcular el nombre d'habitants per barri de l'any 2021 (dada que no tenim), he fet una proporció amb la població total del 2021, la del 2004 i amb la població de cada barri l'any 2004. He obtingut els resultats que es veuen a la taula.

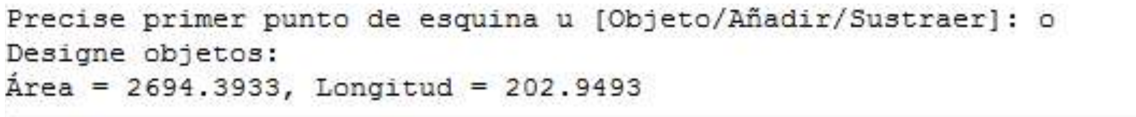
També he calculat la densitat de població de cada barri dividint el nombre d'habitants entre l'àrea i, com que el resultat era d'habitants partit per metre quadrat i busquem habitants partit per hectàrea, he dividit el resultat entre 10.000 (valor que s'obté en passar de metre quadrat a hectòmetre quadrat). Un altre valor que he calculat ha estat el de parades per àrea, que he obtingut dividint el nombre de parades entre l'àrea (en metres quadrats) i dividint entre 10.000 per obtenir el resultat en parades / ha.

El procés que he seguit per calcular les àrees amb AutoCAD és el següent: primer, vaig copiar el plànol dels carrers realitzat anteriorment. Posteriorment, vaig dibuixar el contorn dels barris.



Imatge 78. Contorn dels barris de color groc. *Font pròpia*

Després, mitjançant l'ordre "Àrea", vaig obtenir el resultat del càlcul de cada superfície que seleccionava, és a dir, de cada barri.



```
Precise primer punto de esquina u [Objeto/Añadir/Sustraer]: o
Designe objetos:
Área = 2694.3933, Longitud = 202.9493
```

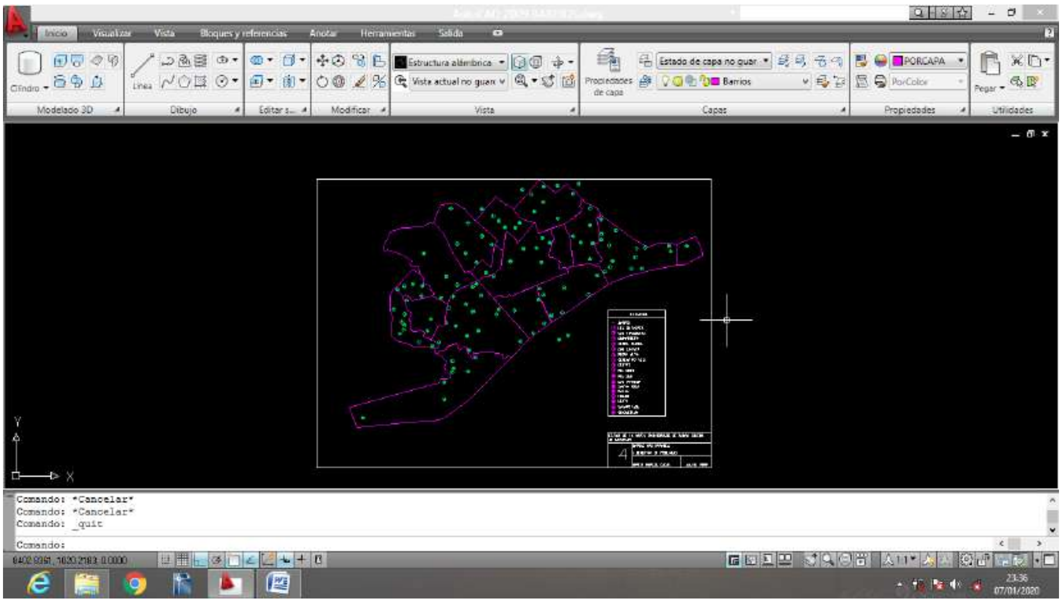
Imatge 79. Ordre per calcular les àrees. *Font pròpia*

Un cop la taula ja està omplerta, he pogut realitzar un anàlisi de les dades, i les conclusions es poden veure en la taula de sota. Posteriorment, traduiré aquestes dades a un mapa per tal de tenir una referència visual, amb la qual cosa classificaré els diferents barris segons la seva densitat de població en diferents colors.

Barris	Densitat	Color
Les Oliveres Can Franquesa La Guinardera Serra Marina Can Calvet Riera Alta	< 100 hab / ha	Verd
Singuerlín Raval Safaretjos Cementiri Vell	100 – 200 hab / ha	Groc
Llatí Riu Sud Riu Nord	200 – 400 hab / ha	Taronja

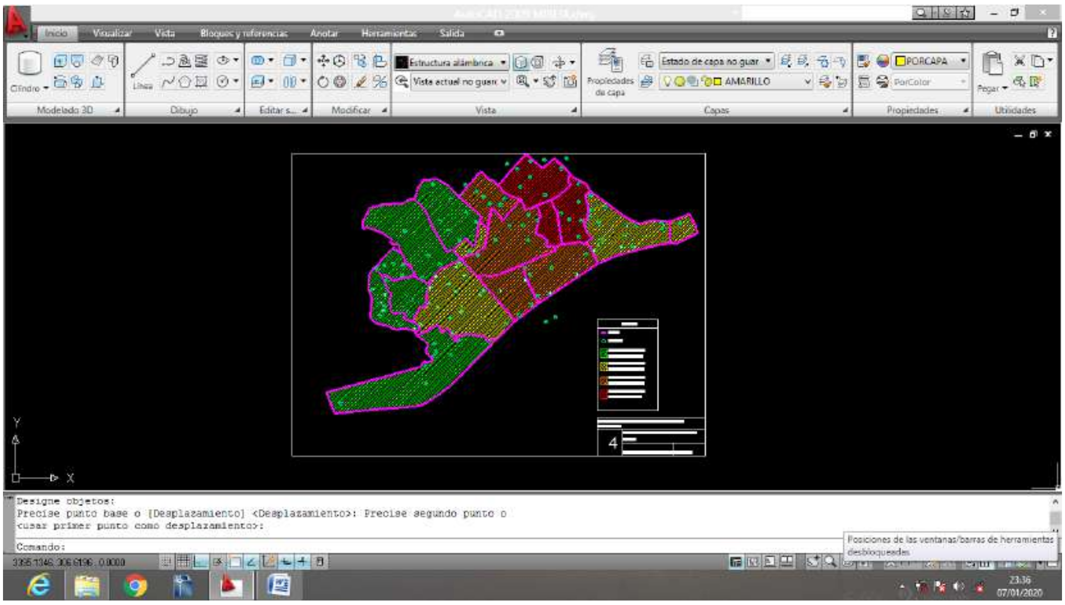
Centre		
Santa Rosa Fondo Can Mariner	> 400 hab / ha	Vermell

Per tal de realitzar el mapa corresponent a aquestes dades (annex 2, plànol 4) el procés que he seguit ha estat el següent: primer, he copiat el plànol dels carrers amb el contorn dels barris, he marcat totes les parades d'autobús i he esborrat el contorn dels carrers per tal que només quedessin els barris i les parades, tal com es pot veure a la imatge 80.



Imatge 80. Plànol amb els barris i les parades. *Font pròpia*

A continuació, he passat les dades de la taula que fan referència a la densitat de població al plànol amb l'objectiu de poder tenir un suport visual que demostri quins barris consten amb una major densitat de població, tal com es pot veure a la imatge 81 i al plànol 4 (annex 2). El codi de colors que es segueix està exposat tant a la llegenda del mapa com a la taula prèviament mostrada.



Imatge 81. Plànol amb la densitat de població de cada barri. *Font pròpia*

El següent pas és analitzar en el plànol (annex 2, plànol 4) la densitat de població. S'observa que els barris amb menys densitat de població són els barris que estan a la perifèria i cap a la muntanya de la Serra Marina. En canvi, els més poblats són Santa Rosa, Fondo i Can Mariner, que estan a prop de Badalona. Els següents més poblats són al centre de Santa Coloma i limitant amb el Riu i Badalona. Als costats, tant els barris menys poblats de la muntanya com els barris a prop de Sant Adrià, són els següents menys poblats.

Santa Coloma de Gramenet disposa també de diferents serveis amb necessitats de comunicació: escoles i instituts, centres d'atenció primària i l'hospital Esperit Sant, així com la seu de l'UB (facultats d'alimentació i farmàcia) i la clínica de Salut Mental al recinte Torribera. També disposa d'un hotel (entre el barri de Singuerlín i el barri Centre) i una llar d'avis pública (barri de Can Calvet), juntament amb diverses privades (barris Centre i Riu Nord).

Els punts de comunicació de la ciutat amb altres ciutats són:

- Amb Montcada i Reixach, pel barri de Les Oliveres.
- Amb Sant Adrià del Besòs, pel barri dels Safaretjos.
- Amb Badalona pel barri de Santa Rosa, per Fondo i Llatí.
- Amb Barcelona, pel barri Riu Nord.

A més, també és interessant el fet que es pugui comunicar amb altres ciutats a través de la xarxa de metro.

Es pot observar que hi ha parades que cobreixen les necessitats de comunicació esmentades anteriorment.

Una apreciació important correspon al barri Can Mariner, que té gran densitat de població, però que en l'anàlisi que s'ha realitzat (de l'anada), no té cap parada. Tot i així, hi ha dues parades ben al límit d'aquest barri, amb la qual cosa es podria considerar cobert.

Si analitzem la densitat de població i la densitat de parades, es pot apreciar el següent.

- Els barris de Serra Marina i Can Franquesa tenen més densitat de parades en comparació amb altres barris segons la densitat de població.
- El següent barri que destaca per la densitat de parades és el barri Llatí.
- La resta de barris queden més o menús compensats.

S'analitza el motiu pel qual les parades estan localitzades d'aquesta determinada manera mitjançant la densitat de població i l'orografia (branca de la geografia física que analitza i classifica diferents tipus de relleus). Els barris de Can Franquesa i Serra Marina són barris els carrers dels quals tenen molt pendent. El barri Llatí també, tot i que els pendents són similars al barri Riera Alta. Malgrat això, el barri Llatí té més densitat de població.

5. OPTIMITZACIÓ DE LA XARXA D'AUTOBUSOS DE SANTA COLOMA DE GRAMENET

5.1. Optimització del nombre de parades

Per tal d'optimitzar el nombre de parades de la xarxa d'autobusos de Santa Coloma de Gramenet, cal analitzar el mapa que mostra els barris amb les parades i la densitat de població (annex 2, plànol 4) i establir un criteri per determinar quins barris tenen excés de parades i quins barris consten amb una manca de parades. Per tal d'establir aquest criteri, també faré referència a la taula de la pàgina 56 i, més concretament, als valors de "Parades / Àrea".

Primer de tot, classificaré els barris segons la seva complexitat. Els barris que tinguin un nivell de complexitat més alt requeriran un major nombre de parades. Els tres grups que hi haurà serà complexitat baixa, mitjana i alta. El criteri per dividir-los serà el següent: els barris amb menor densitat de població (els de color verd i groc) seran de baixa complexitat, i els de major densitat de població (els de color taronja i vermell) seran de complexitat mitjana. Malgrat això, hi haurà algunes excepcions: els barris que tinguin dificultats afegides, com molts pendents o algun edifici particularment visitat, seran de complexitat alta i, per tant, necessitaran una densitat de parades (és a dir, parades partit per àrea) encara més elevada. Un cop aquests criteris ja han estat establerts, podem classificar els barris segons la seva complexitat.

Complexitat baixa	Complexitat mitjana	Complexitat alta
Singuerlín (0,195)	Centre (0,113)	Can Franquesa (0,365)
Les Oliveres (0,082)	Llatí (0,187)	Serra Marina (0,417)
La Guinardera (0,131)	Riu Nord (0,138)	Raval (0,273)
Can Calvet (0,062)	Riu Sud (0,116)	
Riera Alta (0,152)	Can Mariner (0)	
Cementiri Vell (0,111)	Fondo (0,15)	
Safaretjos (0,104)	Santa Rosa (0,195)	

Els barris Can Franquesa i Serra Marina, malgrat que tenen una densitat de població menor que 100 hab / ha i, per tant, estan representats de color verd, consten amb un gran nombre de pendents, amb la qual cosa és necessari un augment en el nombre de parades / àrea. Pel que fa al barri Raval, també està a la classificació de complexitat alta a causa que conté l'únic hospital de la ciutat, l'Esperit Sant. A la taula també podem veure, entre parèntesis, el valor de la densitat de parades de cada barri, dades que s'han extret de la taula de la pàgina 56 en parades / ha.

Per tal de crear un criteri per eliminar o afegir parades, he seguit el següent procés: he sumat tots els valors de "Parades / Àrea" (és a dir, els números entre parèntesis), i he obtingut un total de 2,834. A continuació, he dividit aquest valor entre els 17 barris existents i he obtingut un resultat mitjà de 0,167. Això significa que cada barri ha de tenir, com a mitjana, 0,167 parades / ha. Els càlculs realitzats són els següents:

$$0{,}195 + 0{,}082 + 0{,}365 + 0{,}131 + 0{,}417 + 0{,}062 + 0{,}152 + 0{,}113 + 0{,}111 + 0{,}23 + 0{,}138 + 0{,}116 + 0 + 0{,}15 + 0{,}195 + 0{,}273 + 0{,}104 = 2{,}834$$

$$\frac{2{,}834}{17} = 0{,}1667058824$$

Malgrat això, com que la complexitat de cada barri és diferent, caldrà que alguns tinguin una densitat de parades menor. El criteri establert ha estat el següent: els barris amb una complexitat mitjana tindran un 10% més de parades amb respecte el valor mitjà de densitat de parades (1,67). Els barris amb una complexitat alta tindran un 80% més de densitat de parades, i els barris de complexitat baixa tindran un valor més reduït, que calcularem posteriorment. El percentatge en el qual es veurà disminuït aquest valor dependrà de l'augment de la complexitat mitjana i de la complexitat alta.

Com que ja estan establerts els criteris per determinar la densitat de parades de les complexitats, podem veure quin valor mitjà en parades / ha es correspon a cada complexitat. En el cas de la complexitat mitjana, per calcular el nou valor de densitat de parades de cada barri que pertany a aquesta classificació, cal multiplicar el valor mitjà prèviament obtingut (0,167) per 1,1. Aquest darrer valor representa l'augment en un 10% del nombre de parades, ja que, en multiplicar per 1, obtindríem el mateix valor mitjà (0,167), però multiplicant per 1,1, indiquem que volem un augment amb respecte el 10% sobre la unitat.

$$0{,}167 \cdot 1{,}1 = 0{,}1837$$

Cal repetir el mateix procés amb la complexitat mitjana. En aquest cas, com que l'augment de densitat de parades serà del 80%, cal multiplicar per 1,8.

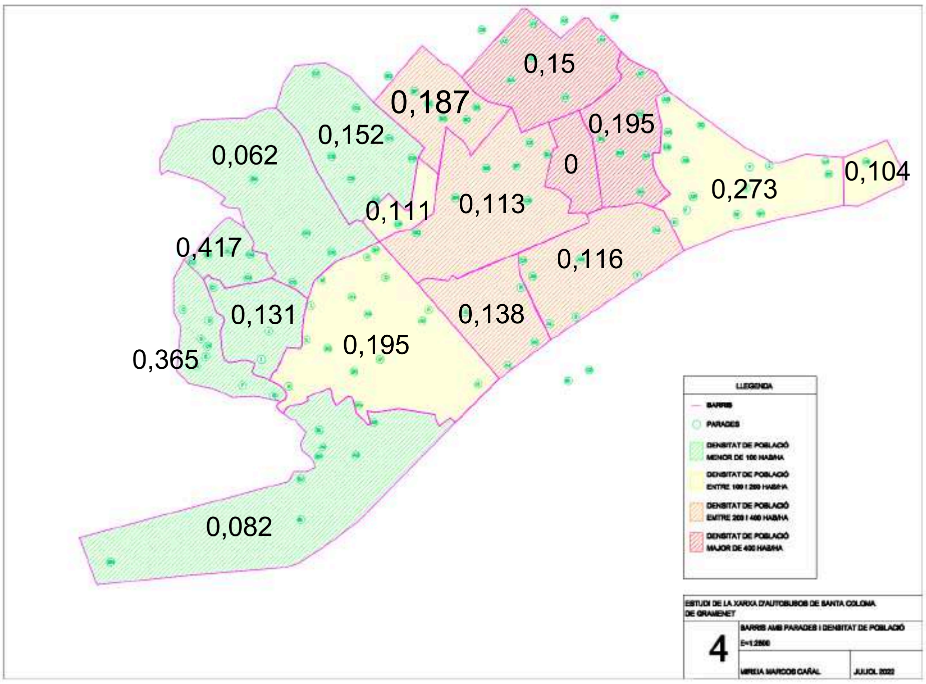
$$0{,}167 \cdot 1{,}8 = 0{,}30006$$

Per calcular el valor mitjà de densitat de parades per a la complexitat baixa, el procés que cal seguir és el següent: sabem que, en total, la suma de totes les densitats de parades ha de ser 2,834 (valor que vam calcular prèviament). Per tant, cal restar a 2,834 el valor mitjà obtingut per a la complexitat mitjana (0,1837) multiplicat pel nombre de barris que haurien de complir amb aquest valor (7) i també cal restar-li el valor mitjà per a la complexitat alta (0,30006) multiplicat pel nombre de barris que pertanyen a aquesta classificació (3). Com que volem obtenir el valor mitjà per a cada barri de complexitat baixa, cal dividir el resultat entre el nombre de barris afectats (7). El càlcul realitzat es pot veure posteriorment.

$$\frac{2{,}834 - 0{,}1837 \cdot 7 - 0{,}30006 \cdot 3}{7} = 0{,}09256$$

El resultat obtingut (0,09256) es correspon al valor mitjà de densitat de parades que cada barri de complexitat baixa hauria de tenir.

Un cop els criteris per determinar si un barri té el nombre adient de parades ja han estat establerts, cal mirar el plànol 4 (annex 2, encara que també es pot veure a la imatge 82) i les dades que es corresponen a les parades / àrea (densitat de parades) per tal d'observar si els valors actuals encaixen amb els valors mitjans calculats. Si algun barri té una densitat de parades molt major o molt menor al valor mitjà que li pertocaria, caldrà fer alguna modificació en el seu nombre de parades. Per tal de facilitar la tasca d'identificació de densitats de parades errònies, escriuré a sobre de cada barri (a la imatge 82) el valor actual de parades / àrea.



Imatge 82. Plànol amb la densitat de població i les parades de cada barri. *Font pròpia*

En aquest plànol es poden apreciar diverses discordances amb relació als criteris establerts. Els barris de color verd i groc (excepte Serra Marina, Can Franquesa i Raval, que són de complexitat alta) són de complexitat baixa, amb la qual cosa el seu valor de densitat de parades hauria de ser proper a 0,09256. Els barris de complexitat mitjana (els taronges i els vermells) haurien de tenir un valor de parades / ha aproximat de 0,1837, i el valor que es correspondria per als tres barris de complexitat alta és de 0,3. Per tant, caldrà fer diversos canvis en la distribució de les parades. L'objectiu és eliminar algunes parades i afegir-ne d'altres per tal que el nombre de parades es mantingui constant, però que es pugui aconseguir una distribució més equiparada.

Si recuperem la taula prèviament creada en la qual els barris estan classificats segons la seva complexitat, podrem observar més fàcilment quins no s'adeqüen als valors mitjans establerts. Entre parèntesis s'especifica si els barris seleccionats consten amb una manca o un excés de parades.

Complexitat baixa (0,09256)	Complexitat mitjana (0,1837)	Complexitat alta (0,30006)
Singuerlín (0,195) – no s'adequa al valor mitjà (excés de parades)	Centre (0,113) – no s'adequa al valor mitjà (manca de parades)	Can Franquesa (0,365) – no s'adequa al valor mitjà (excés de parades)
Les Oliveres (0,082)	Llatí (0,187)	Serra Marina (0,417) – no s'adequa al valor mitjà (excés de parades)
La Guinardera (0,131) – no s'adequa al valor mitjà (excés de parades)	Riu Nord (0,138) – no s'adequa al valor mitjà (manca de parades)	Raval (0,273)
Can Calvet (0,062)	Riu Sud (0,116) – no s'adequa al valor mitjà (manca de parades)	
Riera Alta (0,152) – no s'adequa al valor mitjà (excés de parades)	Can Mariner (0) – no s'adequa al valor mitjà (manca de parades)	
Cementiri Vell (0,111)	Fondo (0,15) – no s'adequa al valor mitjà (manca de parades)	
Safaretjos (0,104)	Santa Rosa (0,195)	

Hi ha cinc barris amb excés de parades (Singuerlín, La Guinardera, Riera Alta, Can Franquesa i Serra Marina) i cinc amb manca de parades (Centre, Riu Nord, Riu Sud, Can Mariner i Fondo). Es pot comprovar que, si eliminem una parada de cada barri amb excés de parades i l'afegim a cada barri amb manca de parades, els valors de densitat de parades canvien favorablement i s'ajusten més al valor mitjà de cada tipus de complexitat. Els càlculs del nou valor de parades / àrea d'aquests deu barris es poden veure posteriorment, però el procés sempre serà el mateix: caldrà dividir el nombre de parades menys 1 (en el cas que hi hagués excés de parades) o més 1 (si hi hagués manca de parades) entre la superfície. Com que el valor de l'àrea està en metres quadrats i volem hectòmetres quadrats, caldrà dividir la superfície entre 10.000.

$$Singuerlín: \frac{16-1}{\frac{820.385}{10.000}} = 0{,}1828$$

$$La\ Guinardera: \frac{3-1}{\frac{232.535}{10.000}} = 0{,}08601$$

$$Riera\ Alta: \frac{7-1}{\frac{459.884}{10.000}} = 0{,}1305$$

$$Can\ Franquesa: \frac{8-1}{\frac{218.881}{10.000}} = 0{,}3198$$

$$Serra\ Marina: \frac{5-1}{\frac{123.006}{10.000}} = 0{,}3252$$

Tal com es pot veure, un cop s'ha eliminat una parada de cada barri amb excés de parades, els índexs de densitat de parades s'adeqüen més al valor mitjà calculat. Ara, caldrà repetir aquest procés amb els barris que tenien una manca de parades, però, en comptes d'eliminar una parada, n'afegirem una.

$$Centre: \frac{7+1}{\frac{626.351}{10.000}} = 0{,}1277$$

$$Riu\ Nord: \frac{4+1}{\frac{288.322}{10.000}} = 0{,}1734$$

$$Riu\ Sud: \frac{7+1}{\frac{423.440}{10.000}} = 0{,}1889$$

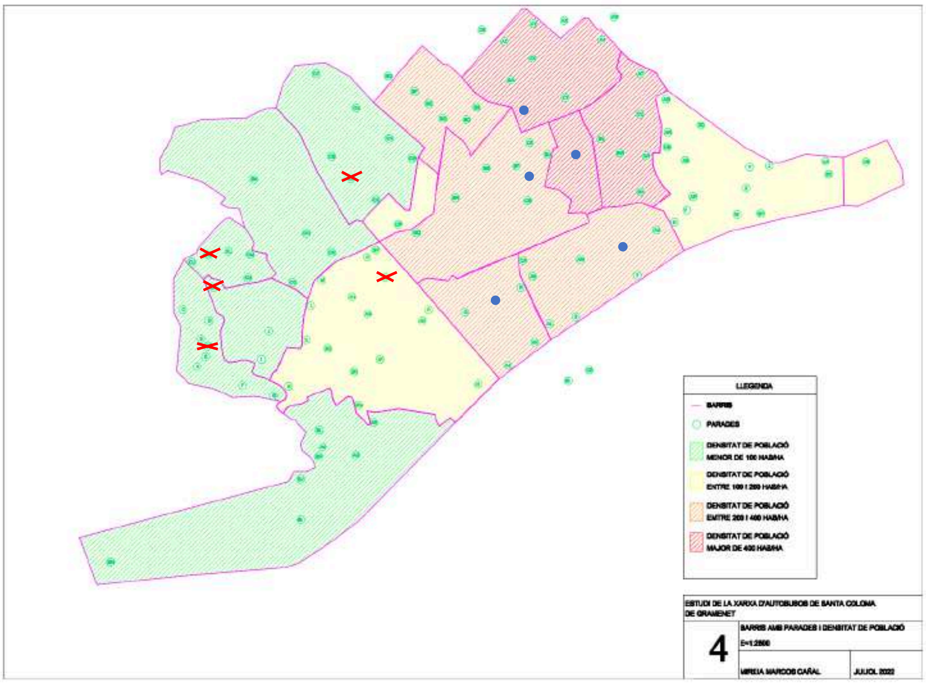
$$Can\ Mariner: \frac{0+1}{\frac{134.778}{10.000}} = 0{,}0742$$

$$Fondo: \frac{6+1}{\frac{404.950}{10.000}} = 0{,}1729$$

Amb aquests darrers càlculs es pot veure que la majoria de barris s'apropen molt al valor mitjà corresponent a la seva complexitat, excepte Centre i Can Mariner, que continuen tenint una manca (encara que més reduïda) de parades. Malgrat això, si es fa un estudi més proper d'aquests dos barris podrem detectar el següent:

- Centre: encara que té una gran superfície, hi ha una àrea (la part inferior esquerra del barri) que consta amb menys parades. Malgrat això, aquest estudi s'aplica únicament sobre l'anada de la ruta de la línia. Si s'estudiés la tornada, es podria veure que aquesta zona està ben coberta per parades, amb la qual cosa no és necessari augmentar el nombre de parades d'aquest barri més.
- Can Mariner: aquest barri, en ser de menor superfície, no constava amb cap parada, però aquest estudi proposa que s'afegeixi una parada per tal que el barri estigui cobert. Malgrat això, no és necessari que s'afegeixin més parades, ja que, si ens fixem en el mapa, podrem veure que hi ha parades a la perifèria dels barris Centre, Fondo i Santa Rosa que es troben molt a prop de Can Mariner. Encara que aquestes parades no estiguin dintre del barri, n'estan molt a prop, amb la qual cosa es pot considerar innecessari un augment encara major del nombre de parades.

Un cop ha finalitzat el procés de distribució més òptim de les parades, cal determinar quines seran eliminades i on es col·locaran les parades que cal afegir. Podem concloure de l'estudi previ que cinc parades seran redistribuïdes. El criteri per decidir quines seran eliminades i quines seran afegides és el següent: si entre una parada i una altra el temps és de dos minuts, es prioritzarà l'afegiment d'una altra parada entre aquestes dues existents perquè el trajecte es divideixi en dos. Si entre dues parades el temps és de trenta segons, es prioritzarà l'eliminació d'una de les parades per tal que el recorregut passi a ser d'un minut. Les parades eliminades es poden veure tatxades amb vermell a la imatge 83, mentre que les afegides estan indicades amb un cercle blau.

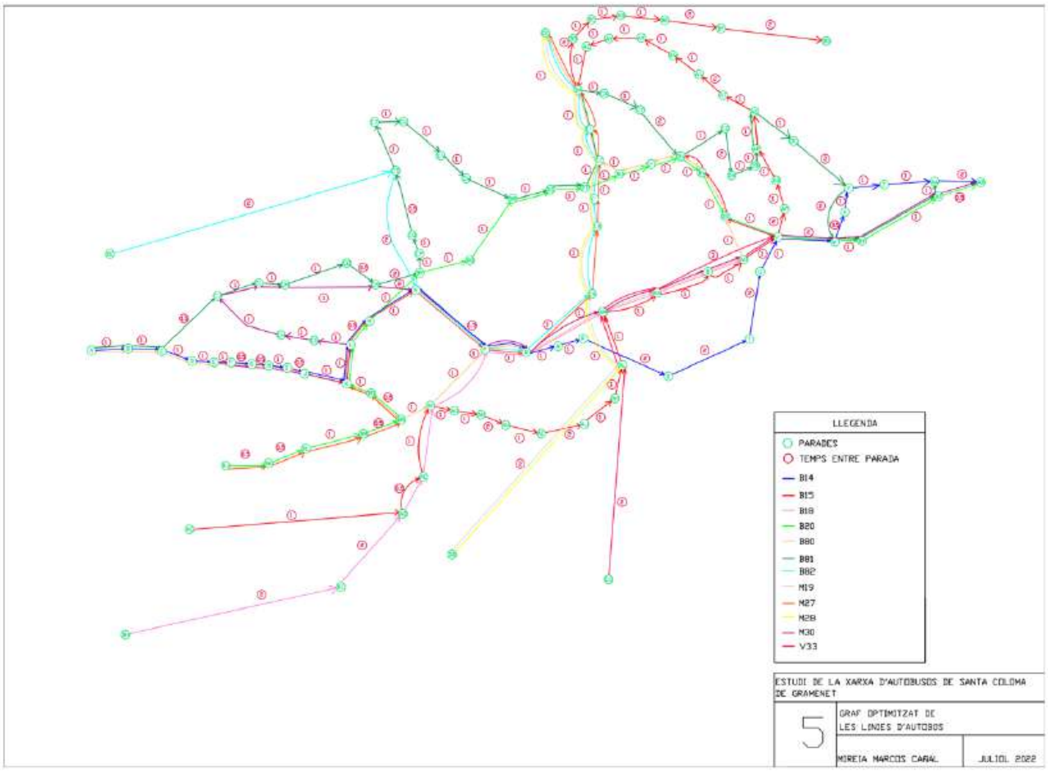


Imatge 83. Plànol amb les parades redistribuïdes. *Font pròpia*

Els vèrtexs que he eliminat són O, CR, CK, DF i CF, i els que he afegit els he anomenat A', B', C', D' i E'.

5.2. Optimització del recorregut de les línies amb Excel

A continuació, realitzaré una optimització del recorregut de les línies d'autobús (sobre el mapa amb les parades optimitzades, és a dir, sobre el plànol de la imatge 83) per tal de minimitzar el temps de cada trajecte. Per tal de dur a terme aquesta segona optimització, utilitzaré el programa Excel i l'extensió Solver. Primer de tot, caldrà crear un nou graf basat en el plànol amb les parades redistribuïdes, que serà el plànol 5 (graf optimitzat de les línies d'autobús) i es troba a l'annex 2. També es pot veure a la imatge 84. És un graf dirigit, multigraf i ponderat (el valor de les arestes es correspon al temps entre parada i parada) que representa el recorregut de totes les línies d'autobús de Santa Coloma de Gramenet tenint en compte la redistribució de parades estudiada prèviament.



Imatge 84. Graf nou amb les parades redistribuïdes. *Font pròpia*

Ara, optimitzaré cada línia, i, per aconseguir-ho, tractaré de reduir el temps entre la parada inicial i la parada final per a cada línia. Aquest procés equival a minimitzar la suma del valor totes les arestes per tal d'obtenir el camí més curt. Per fer això crearé un programa amb Excel tal com es mostra a l'apartat 3.6.

Primer, cal traduir el graf a una taula, en la qual s'introduiran les següents dades: vèrtex d'inici (columna "des de"), vèrtex final (columna "fins a"), el temps que hi ha entre els dos vèrtexs, que serà el valor de l'aresta (columna "temps"). Es crearà una quarta columna, anomenada binari, en la qual el programa introduirà automàticament els valors 1 o 0, tenint en compte que l'1 indica que el parell de vèrtexs seleccionats formaran part del camí més curt i el 0 indica que no. Cal destacar que si la casella està buida, es comptarà com si hi hagués un 0. El resultat de la taula es pot veure a les imatges 85, 86 i 87.

DES DE	FINS A	TEMPS	BINARI
A	B	1	
B	C	1	
C	CJ	1,5	
C	D	1	
D	E	1	
E	F	1	
F	G	0,5	
G	H	0,5	
H	I	1	
I	J	0,5	
J	K	1	
K	L	1	
K	BO	1	
L	CG	1	
L	M	0,5	
M	BP	1	
M	N	1	
N	P	1,5	
P	Q	1	
Q	A'	1	
Q	CA	1	
Q	AM	1	
R	S	2	
S	T	2	
T	U	2	
U	V	1	
V	BX	1	
V	AP	2	
V	W	2	
W	X	0,5	
W	BY	1	
X	Y	1	
Y	W	2	
Y	Z	1	
Z	AA	1	
AA	AB	2	
AC	AD	1	
AD	AE	0,5	
AE	AF	1	
AF	P	1	
AF	AG	1	
AG	AH	1	
AH	AU	2	
AU	AI	1	

Imatge 85. Graf traduït a una taula. *Font pròpia*

AI	AJ	2	
AJ	AK	1	
AK	AL	1	
AL	AM	1	
AL	CA	1	
AM	AN	1	
AN	V	3	
AN	B'	1	
AO	BX	1	
AO	V	1	
AP	AQ	1	
AQ	AR	1	
AR	AS	1	
AS	DC	1	
AS	AT	1	
AT	AV	2	
AV	AW	1	
AW	AX	1	
AX	AY	1	
AY	AZ	1	
AZ	BA	1	
BA	CX	1	
BA	CE	1	
BA	BB	2	
BB	BC	1	
BC	BD	1	
BD	BE	1	
BE	BF	2	
BF	BG	2	
BH	BI	2	
BI	AD	2	
BJ	BK	0,5	
BK	BL	0,5	
BL	BM	1	
BM	BN	0,5	
BN	AF	1	
BN	BO	0,5	
BO	BN	0,5	
BO	K	1	
BP	CP	1	
BP	BQ	1	
BQ	BR	1	
BR	BS	1	
BS	BT	1	

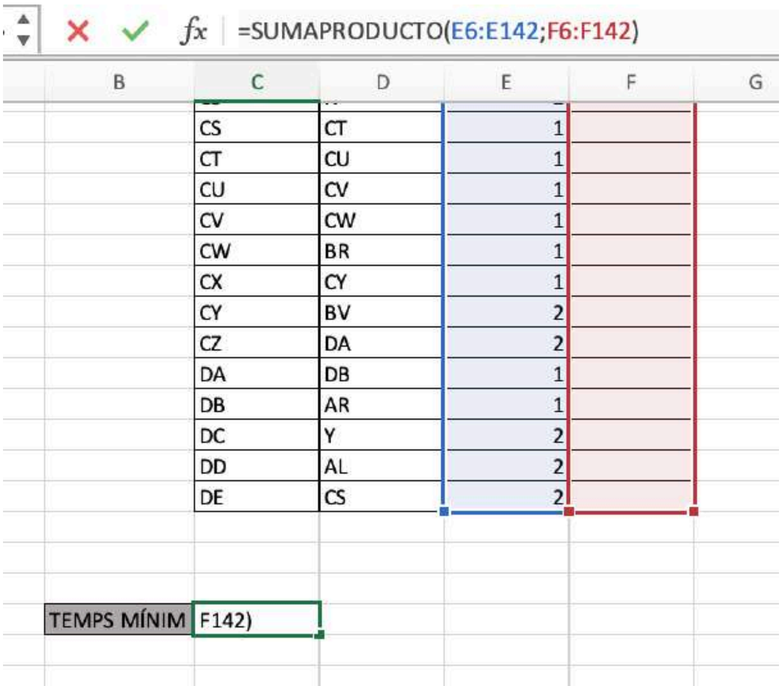
Imatge 86. Graf traduït a una taula. *Font pròpia*

BT	CC	1	
BT	BU	1	
BU	CC	1	
BU	D'	1	
BV	D'	1	
BV	CZ	1	
BV	BW	1	
BW	BV	1	
BW	BX	1	
BX	BW	1	
BX	V	1	
BY	BZ	1	
BZ	AA	1	
BZ	AB	0,5	
A'	R	1	
B'	AO	1	
C'	CC	1	
D'	BU	1	
D'	BV	1	
E'	BA	1	
CA	CB	1	
CB	C'	1	
CC	E'	1	
CD	AL	2	
CG	CH	1	
CH	CJ	1	
CJ	CL	1	
CL	CM	1	
CM	CO	1	
CM	CN	1	
CN	BP	2	
CN	N	2	
CO	CN	0,5	
CP	CQ	1	
CQ	CS	1,5	
CS	N	2	
CS	CT	1	
CT	CU	1	
CU	CV	1	
CV	CW	1	
CW	BR	1	
CX	CY	1	
CY	BV	2	
CZ	DA	2	
DA	DB	1	
DB	AR	1	
DC	Y	2	
DD	AL	2	
DE	CS	2	

Imatge 87. Graf traduït a una taula. *Font pròpia*

Caldrà fer un programa nou per a cada línia, però aquesta taula es repetirà en tots ells. L'únic aspecte que canviarà serà la columna "binari", que s'omplirà posteriorment.

A continuació, es crearà una casella que sumi el valor de totes les arestes que formaran part del recorregut òptim. Aquesta s'anomenarà "temps mínim". La fórmula que introduirem serà la suma de tots els productes entre les columnes "temps" i "binari". La fórmula emprada es pot veure a la part superior de la imatge 88. El resultat d'aquesta casella, de moment, és 0, ja que no hi ha cap valor introduït a la columna "binari".



Imatge 88. Fórmula que indicarà el valor del camí més curt entre dos vèrtexs. *Font pròpia*

Tot seguit, cal crear una altra taula per introduir una sèrie de restriccions. Aquesta taula constarà de tres columnes: "vèrtex", "flux" i "condició". A sota de la casella "vèrtex", s'escriuran tots els vèrtexs que formen part del graf, cosa que es pot veure a les imatges 89 i 90. A la tercera columna ("condició"), caldrà posar un 1 si el vèrtex que hi ha al costat és l'inicial, i un -1 si és el final. Aquesta informació canviarà segons la línia que es vulgui optimitzar, ja que no totes tenen el mateix punt d'inici i de fi. En aquest cas, la primera línia que serà optimitzada serà la B14. El seu vèrtex inicial és A i el final és AB, així que, al costat del vèrtex A i a la columna "condició" es posarà un 1, mentre que al costat del vèrtex AB es posarà un -1. Això es pot veure reflectit a les imatges 91 i 92.

VÈRTEX	FLUX	CONDICIÓ
A		
B		
C		
D		
E		
F		
G		
H		
I		
J		
K		
L		
M		
N		
P		
Q		
R		
S		
T		
U		
V		
W		
X		
Y		
Z		
AA		
AB		
AC		
AD		
AE		
AF		
AG		
AH		
AI		
AJ		
AK		
AL		
AM		
AN		
AO		
AP		
AQ		
AR		
AS		
AT		
AU		
AV		
AW		
AX		
AY		
AZ		
BA		
BB		
BC		

Imatge 89. Columnes “vèrtex”, “flux” i “condició”. *Font pròpia*

BD		
BE		
BF		
BG		
BH		
BI		
BJ		
BK		
BL		
BM		
BN		
BO		
BP		
BQ		
BR		
BS		
BT		
BU		
BV		
BW		
BX		
BY		
BZ		
A'		
B'		
C'		
D'		
E'		
CA		
CB		
CC		
CD		
CE		
CG		
CH		
CJ		
CL		
CM		
CN		
CO		
CP		
CQ		
CS		
CT		
CU		
CV		
CW		
CX		
CY		
CZ		
DA		
DB		
DC		
DD		
DE		

Imatge 90. Columnes “vèrtex”, “flux” i “condició”. *Font pròpia*

VÈRTEX	FLUX	CONDICIÓ
A		1

Imatge 91. Condició del vèrtex A. *Font pròpia*

AB		-1

Imatge 92. Condició del vèrtex AB. *Font pròpia*

Les altres caselles de la columna “condició” seran omplertes amb un 0. Finalment, s’omplirà la columna “flux” de la següent manera: caldrà introduir una fórmula (en la qual s’utilitzarà una suma condicional) perquè a mesura que canviïn els valors de “binari”, també canviïn els de “flux”. L’objectiu serà que la columna “flux” sigui igual a la columna “condició”. La fórmula que cal utilitzar es pot veure a la imatge 93. Caldrà copiar aquesta fórmula per a les altres caselles de “flux”, i l’únic aspecte que variarà serà el vèrtex seleccionat (la casella vermella). Per exemple, en omplir la fórmula per al vèrtex B, la casella vermella serà la corresponent a B, i així successivament.

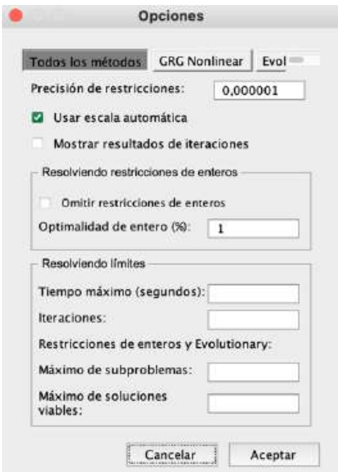
```
=SUMAR.SI(C$6:C$142;H6;F$6:F$142)-SUMAR.SI(D$6:D$142;H6;F$6:F$142)
```

DES DE	FINS A	TEMPS	BINARI		VÈRTEX	FLUX	CONDICIÓ
A	B	1	1		A	F$142)	1
B	C	1	1		B	0	0
C	CJ	1,5			C	0	0
C	D	1	1		D	0	0
D	E	1	1		E	0	0
E	F	1	1		F	0	0
F	G	0,5	1		G	0	0
G	H	0,5	1		H	0	0
H	I	1	1		I	0	0
I	J	0,5	1		J	0	0
J	K	1	1		K	0	0
K	L	1	1		L	0	0
K	BO	1			M	0	0
L	CG	1			N	0	0
L	M	0,5	1		P	0	0
M	BP	1			Q	0	0
M	N	1	1		R	0	0
N	P	1,5	1		S	0	0
P	Q	1	1		T	0	0
Q	A'	1			U	0	0
Q	CA	1			V	0	0
Q	AM	1	1		W	0	0
R	S	2			X	0	0
S	T	2			Y	0	0
T	U	2			Z	0	0
U	V	1			AA	0	0
V	BX	1			AB	-1	-1
V	AP	2			AC	0	0
V	W	2	1		AD	0	0

Imatge 93. Fórmula per a les caselles de “flux”. *Font pròpia*

A continuació, es programarà el Solver, eina que, gràcies a la informació de les taules creades, calcularà el camí més curt entre els dos vèrtexs seleccionats (A i AB) i omplirà automàticament les caselles de “binari”. Per programar aquesta eina, cal situar-se a sobre de la casella en la qual es va introduir la fórmula per calcular el temps mínim i cal obrir l’eina Solver (a l’apartat “Dades”). S’introduiran les següents dades:

- A l’apartat “Establir objectiu” ja s’haurà seleccionat la casella correcta, que és la que conté la fórmula que calcularà el temps mínim.
- A sota d’aquest apartat, se seleccionarà l’opció “Mín”, ja que volem optimitzar la nostra funció per obtenir un valor mínim.
- A l’apartat “Canviant les cel·les de variables”, se seleccionarà la columna “binari”, ja que aquestes són les caselles que el programa haurà de canviar automàticament per determinar quin és el camí més curt.
- Amb referència al següent apartat, les restriccions, cal establir-ne dues:
    - La columna “binari” només pot adquirir valors de 0 i 1. Per tant, s’afegirà una restricció en la qual se seleccionarà tota la columna i es tirarà l’opció “bin”.
    - La columna “flux” ha de ser igual a la columna “condició”.
- Es marcarà la casella posterior a les restriccions, que convertirà les variables sense restriccions en no negatives.
- A l’apartat “Mètode de resolució”, se seleccionarà “Simplex LP”.
- Al costat d’aquesta casella, hi haurà l’apartat “Opcions”, i la seva configuració, que ja ve predeterminada, es pot veure a la imatge 94.

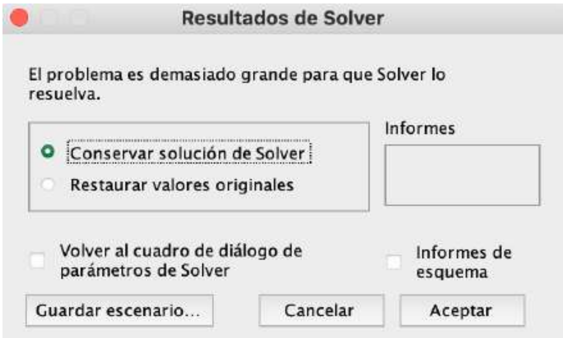


Imatge 94. Configuració de l’apartat “Opcions”. *Font pròpia*

La configuració de l'eina Solver es pot veure a la imatge 95.

Imatge 95. Configuració del Solver. *Font pròpia*

Malgrat això, quan se selecciona l'opció de "resoldre", Solver dona un error, ja que el programa conté massa dades, tal com es pot veure a la imatge 96.



Imatge 96. Error del programa. *Font pròpia*

La programació amb Solver ha donat un error perquè el programa només admet fins a 100 restriccions, i, en el cas d'aquest programa, encara que s'han introduït únicament dos restriccions, cadascuna consta amb un gran nombre de variables (la primera restricció, que indica que la columna "binari" només acceptarà valors de 0 i 1, s'aplica en 137 variables, i la segona restricció s'aplica en 109 variables).

Com que és impossible eliminar restriccions i continuar obtenint un resultat correcte i òptim, l'eina Solver no servirà. Tot i així, el programa realitzat amb Excel encara es pot aprofitar, ja que només cal realitzar els càlculs que faria Solver a mà i comprovar que totes les restriccions es compleixen. Caldrà omplir les caselles de la columna "binari" de 0 i 1 (amb la qual cosa es compliria la primera restricció) per obtenir un camí més curt (objectiu del programa) i caldrà que, en finalitzar el programa, la columna "flux", que anirà canviant automàticament a mesura que canviem els valors de "binari", sigui igual a la columna "condició" (segona restricció). L'estratègia que cal seguir per trobar un camí òptim es la següent: en molts casos, un vèrtex estarà comunicat únicament amb un altre, però cada vegada que des d'un vèrtex es pugui anar a més d'un vèrtex, caldrà recórrer tots els camins possibles i veure si algun d'ells és menor al temps ja existent. En aquest cas, la línia que s'optimitzarà és la B14, que té un temps existent de 30 minuts. Després de finalitzar el procés d'optimització manual, s'ha trobat un camí que consta d'un temps total de 26 minuts. Per tant, la línia B14 pot ser optimitzada.

A continuació, caldrà repetir aquest procés amb totes les altres línies. En la taula posterior es recullen els resultats de l'optimització.

Línia a optimitzar	Temps abans de l'optimització	Temps després de l'optimització	Resultat
B14	30 min	26 min	Es pot optimitzar
B80	26 min	16,5 min	Es pot optimitzar
B81	40,5 min	23,5 min	Es pot optimitzar
B82	13,5 min	13 min	Es pot optimitzar
B18	11,5 min	11,5 min	No es pot optimitzar
B15	38,5 min	31,5 min	Es pot optimitzar
B20	20 min	19 min	Es pot optimitzar
M19	9 min	9 min	No es pot optimitzar

M27	16 min	12,5 min	Es pot optimitzar
M28	9 min	9 min	No es pot optimitzar
M30	24,5 min	19 min	Es pot optimitzar
V33	10 min	10 min	No es pot optimitzar

En conclusió, hi ha quatre línies que no poden ser optimitzades, però per a les altres vuit sí que s'ha pogut reduir el temps total del trajecte. A continuació es pot veure el programa amb Excel que s'ha realitzat per a cada línia.

- LÍNIA B14

DES DE	FINS A	TEMPS	BINARI
A	B	1	1
B	C	1	1
C	CJ	1,5	0
C	D	1	1
D	E	1	1
E	F	1	1
F	G	0,5	1
G	H	0,5	1
H	I	1	1
I	J	0,5	1
J	K	1	1
K	L	1	1
K	BO	1	0
L	CG	1	0
L	M	0,5	1
M	BP	1	0
M	N	1	1
N	P	1,5	1
P	Q	1	1
Q	A'	1	0
Q	CA	1	0
Q	AM	1	1
R	S	2	0
S	T	2	0
T	U	2	0
U	V	1	0
V	BX	1	0
V	AP	2	0
V	W	2	1
W	X	0,5	1
W	BY	1	0
X	Y	1	1
Y	W	2	0
Y	Z	1	1
Z	AA	1	1
AA	AB	2	1
AC	AD	1	0
AD	AE	0,5	0
AE	AF	1	0
AF	P	1	0
AF	AG	1	0
AG	AH	1	0
AH	AU	2	0
AU	AI	1	0
AI	AJ	2	0
AJ	AK	1	0
AK	AL	1	0
AL	AM	1	0
AL	CA	1	0

VÈRTEX	FLUX	CONDICIÓ
A	1	1
B	0	0
C	0	0
D	0	0
E	0	0
F	0	0
G	0	0
H	0	0
I	0	0
J	0	0
K	0	0
L	0	0
M	0	0
N	0	0
P	0	0
Q	0	0
R	0	0
S	0	0
T	0	0
U	0	0
V	0	0
W	0	0
X	0	0
Y	0	0
Z	0	0
AA	0	0
AB	-1	-1
AC	0	0
AD	0	0
AE	0	0
AF	0	0
AG	0	0
AH	0	0
AI	0	0
AJ	0	0
AK	0	0
AL	0	0
AM	0	0
AN	0	0
AO	0	0
AP	0	0
AQ	0	0
AR	0	0
AS	0	0
AT	0	0
AU	0	0
AV	0	0
AW	0	0
AX	0	0

Imatge 97. Taules de l'optimització de la línia B14. *Font pròpia*

AM	AN	1	1
AN	V	3	1
AN	B'	1	0
AO	BX	1	0
AO	V	1	0
AP	AQ	1	0
AQ	AR	1	0
AR	AS	1	0
AS	DC	1	0
AS	AT	1	0
AT	AV	2	0
AV	AW	1	0
AW	AX	1	0
AX	AY	1	0
AY	AZ	1	0
AZ	BA	1	0
BA	CX	1	0
BA	CE	1	0
BA	BB	2	0
BB	BC	1	0
BC	BD	1	0
BD	BE	1	0
BE	BF	2	0
BF	BG	2	0
BH	BI	2	0
BI	AD	2	0
BJ	BK	0,5	0
BK	BL	0,5	0
BL	BM	1	0
BM	BN	0,5	0
BN	AF	1	0
BN	BO	0,5	0
BO	BN	0,5	0
BO	K	1	0
BP	CP	1	0
BP	BQ	1	0
BQ	BR	1	0
BR	BS	1	0
BS	BT	1	0
BT	CC	1	0
BT	BU	1	0
BU	CC	1	0
BU	D'	1	0
BV	D'	1	0
BV	CZ	1	0
BV	BW	1	0
BW	BV	1	0
BW	BX	1	0
BX	BW	1	0

AY	0	0
AZ	0	0
BA	0	0
BB	0	0
BC	0	0
BD	0	0
BE	0	0
BF	0	0
BG	0	0
BH	0	0
BI	0	0
BJ	0	0
BK	0	0
BL	0	0
BM	0	0
BN	0	0
BO	0	0
BP	0	0
BQ	0	0
BR	0	0
BS	0	0
BT	0	0
BU	0	0
BV	0	0
BW	0	0
BX	0	0
BY	0	0
BZ	0	0
A'	0	0
B'	0	0
C'	0	0
D'	0	0
E'	0	0
CA	0	0
CB	0	0
CC	0	0
CD	0	0
CE	0	0
CG	0	0
CH	0	0
CJ	0	0
CL	0	0
CM	0	0
CN	0	0
CO	0	0
CP	0	0
CQ	0	0
CS	0	0
CT	0	0

Imatge 98. Taules de l’optimització de la línia B14. *Font pròpia*

BX	V	1	0
BY	BZ	1	0
BZ	AA	1	0
BZ	AB	0,5	0
A'	R	1	0
B'	AO	1	0
C'	CC	1	0
D'	BU	1	0
D'	BV	1	0
E'	BA	1	0
CA	CB	1	0
CB	C'	1	0
CC	E'	1	0
CD	AL	2	0
CG	CH	1	0
CH	CJ	1	0
CJ	CL	1	0
CL	CM	1	0
CM	CO	1	0
CM	CN	1	0
CN	BP	2	0
CN	N	2	0
CO	CN	0,5	0
CP	CQ	1	0
CQ	CS	1,5	0
CS	N	2	0
CS	CT	1	0
CT	CU	1	0
CU	CV	1	0
CV	CW	1	0
CW	BR	1	0
CX	CY	1	0
CY	BV	2	0
CZ	DA	2	0
DA	DB	1	0
DB	AR	1	0
DC	Y	2	0
DD	AL	2	0
DE	CS	2	0

CU	0	0
CV	0	0
CW	0	0
CX	0	0
CY	0	0
CZ	0	0
DA	0	0
DB	0	0
DC	0	0
DD	0	0
DE	0	0

TEMPS MÍNIM	26

Imatge 99. Taules de l’optimització de la línia B14. *Font pròpia*

- LÍNIA B80

DES DE	FINS A	DISTÀNCIA	BINARI
A	B	1	1
B	C	1	1
C	CJ	1,5	1
C	D	1	
D	E	1	
E	F	1	
F	G	0,5	
G	H	0,5	
H	I	1	
I	J	0,5	
J	K	1	
K	L	1	
K	BO	1	
L	CG	1	
L	M	0,5	
M	BP	1	
M	N	1	
N	P	1,5	
P	Q	1	
Q	A'	1	
Q	CA	1	
Q	AM	1	
R	S	2	
S	T	2	
T	U	2	
U	V	1	
V	BX	1	
V	AP	2	
V	W	2	
W	X	0,5	
W	BY	1	
X	Y	1	
Y	W	2	
Y	Z	1	
Z	AA	1	
AA	AB	2	
AC	AD	1	
AD	AE	0,5	
AE	AF	1	
AF	P	1	
AF	AG	1	
AG	AH	1	
AH	AU	2	
AU	AI	1	
AI	AJ	2	
AJ	AK	1	
AK	AL	1	
AL	AM	1	

VÈRTEX	FLUX	CONDICIÓ
A	1	1
B	0	0
C	0	0
D	0	0
E	0	0
F	0	0
G	0	0
H	0	0
I	0	0
J	0	0
K	0	0
L	0	0
M	0	0
N	0	0
P	0	0
Q	0	0
R	0	0
S	0	0
T	0	0
U	0	0
V	0	0
W	0	0
X	0	0
Y	0	0
Z	0	0
AA	0	0
AB	0	0
AC	0	0
AD	0	0
AE	0	0
AF	0	0
AG	0	0
AH	0	0
AI	0	0
AJ	0	0
AK	0	0
AL	0	0
AM	0	0
AN	0	0
AO	0	0
AP	0	0
AQ	0	0
AR	0	0
AS	0	0
AT	0	0
AU	0	0
AV	0	0
AW	0	0

Imatge 100. Taules de l'optimització de la línia B80. *Font pròpia*

AL	CA	1	
AM	AN	1	
AN	V	3	
AN	B'	1	
AO	BX	1	
AO	V	1	
AP	AQ	1	
AQ	AR	1	
AR	AS	1	
AS	DC	1	
AS	AT	1	
AT	AV	2	
AV	AW	1	
AW	AX	1	
AX	AY	1	
AY	AZ	1	
AZ	BA	1	
BA	CX	1	
BA	CE	1	1
BA	BB	2	
BB	BC	1	
BC	BD	1	
BD	BE	1	
BE	BF	2	
BF	BG	2	
BH	BI	2	
BI	AD	2	
BJ	BK	0,5	
BK	BL	0,5	
BL	BM	1	
BM	BN	0,5	
BN	AF	1	
BN	BO	0,5	
BO	BN	0,5	
BO	K	1	
BP	CP	1	
BP	BQ	1	1
BQ	BR	1	1
BR	BS	1	1
BS	BT	1	1
BT	CC	1	1
BT	BU	1	
BU	CC	1	
BU	D'	1	
BV	D'	1	
BV	CZ	1	
BV	BW	1	
BW	BV	1	
BW	BX	1	
BX	BW	1	

AX	0	0
AY	0	0
AZ	0	0
BA	0	0
BB	0	0
BC	0	0
BD	0	0
BE	0	0
BF	0	0
BG	0	0
BH	0	0
BI	0	0
BJ	0	0
BK	0	0
BL	0	0
BM	0	0
BN	0	0
BO	0	0
BP	0	0
BQ	0	0
BR	0	0
BS	0	0
BT	0	0
BU	0	0
BV	0	0
BW	0	0
BX	0	0
BY	0	0
BZ	0	0
A'	0	0
B'	0	0
C'	0	0
D'	0	0
E'	0	0
CA	0	0
CB	0	0
CC	0	0
CD	0	0
CE	-1	-1
CG	0	0
CH	0	0
CJ	0	0
CL	0	0
CM	0	0
CN	0	0
CO	0	0
CP	0	0
CQ	0	0
CS	0	0
CT	0	0

Imatge 101. Taules de l'optimització de la línia B80. *Font pròpia*

BX	V	1	
BY	BZ	1	
BZ	AA	1	
BZ	AB	0,5	
A'	R	1	
B'	AO	1	
C'	CC	1	
D'	BU	1	
D'	BV	1	
E'	BA	1	1
CA	CB	1	
CB	C'	1	
CC	E'	1	1
CD	AL	2	
CG	CH	1	
CH	CI	1	
CI	CL	1	1
CL	CM	1	1
CM	CO	1	
CM	CN	1	1
CN	BP	2	1
CN	N	2	
CO	CN	0,5	
CP	CQ	1	
CQ	CS	1,5	
CS	N	2	
CS	CT	1	
CT	CU	1	
CU	CV	1	
CV	CW	1	
CW	BR	1	
CX	CY	1	
CY	BV	2	
CZ	DA	2	
DA	DB	1	
DB	AR	1	
DC	Y	2	
DD	AL	2	
DE	CS	2	

DISTÀNCIA MÍNIMA	16,5

CU	0	0
CV	0	0
CW	0	0
CX	0	0
CY	0	0
CZ	0	0
DA	0	0
DB	0	0
DC	0	0
DD	0	0
DE	0	0

Imatge 102. Taules de l'optimització de la línia B80. *Font pròpia*

- LÍNIA B81

DES DE	FINS A	DISTÀNCIA	BINARI
A	B	1	1
B	C	1	1
C	CI	1,5	1
C	D	1	
D	E	1	
E	F	1	
F	G	0,5	
G	H	0,5	
H	I	1	
I	J	0,5	
J	K	1	
K	L	1	
K	BO	1	
L	CG	1	
L	M	0,5	
M	BP	1	
M	N	1	
N	P	1,5	
P	Q	1	
Q	A'	1	
Q	CA	1	
Q	AM	1	
R	S	2	
S	T	2	
T	U	2	
U	V	1	
V	BX	1	
V	AP	2	
V	W	2	1
W	X	0,5	
W	BY	1	1
X	Y	1	
Y	W	2	
Y	Z	1	
Z	AA	1	
AA	AB	2	
AC	AD	1	
AD	AE	0,5	
AE	AF	1	
AF	P	1	
AF	AG	1	
AG	AH	1	
AH	AU	2	
AU	AI	1	
AI	AJ	2	
AJ	AK	1	
AK	AL	1	
AL	AM	1	
AL	CA	1	

VÈRTEX	FLUX	CONDICIÓ
A	1	1
B	0	0
C	0	0
D	0	0
E	0	0
F	0	0
G	0	0
H	0	0
I	0	0
J	0	0
K	0	0
L	0	0
M	0	0
N	0	0
P	0	0
Q	0	0
R	0	0
S	0	0
T	0	0
U	0	0
V	0	0
W	0	0
X	0	0
Y	0	0
Z	0	0
AA	-1	-1
AB	0	0
AC	0	0
AD	0	0
AE	0	0
AF	0	0
AG	0	0
AH	0	0
AI	0	0
AJ	0	0
AK	0	0
AL	0	0
AM	0	0
AN	0	0
AO	0	0
AP	0	0
AQ	0	0
AR	0	0
AS	0	0
AT	0	0
AU	0	0
AV	0	0
AW	0	0
AX	0	0

Imatge 103. Taules de l'optimització de la línia B81. *Font pròpia*

AM	AN	1	
AN	V	3	
AN	B'	1	
AO	BX	1	
AO	V	1	
AP	AQ	1	
AQ	AR	1	
AR	AS	1	
AS	DC	1	
AS	AT	1	
AT	AV	2	
AV	AW	1	
AW	AX	1	
AX	AY	1	
AY	AZ	1	
AZ	BA	1	
BA	CX	1	
BA	CE	1	
BA	BB	2	
BB	BC	1	
BC	BD	1	
BD	BE	1	
BE	BF	2	
BF	BG	2	
BH	BI	2	
BI	AD	2	
BJ	BK	0,5	
BK	BL	0,5	
BL	BM	1	
BM	BN	0,5	
BN	AF	1	
BN	BO	0,5	
BO	BN	0,5	
BO	K	1	
BP	CP	1	
BP	BQ	1	1
BQ	BR	1	1
BR	BS	1	1
BS	BT	1	1
BT	CC	1	
BT	BU	1	1
BU	CC	1	
BU	D'	1	1
BV	D'	1	
BV	CZ	1	
BV	BW	1	1
BW	BV	1	
BW	BX	1	1
BX	BW	1	

AY	0	0
AZ	0	0
BA	0	0
BB	0	0
BC	0	0
BD	0	0
BE	0	0
BF	0	0
BG	0	0
BH	0	0
BI	0	0
BJ	0	0
BK	0	0
BL	0	0
BM	0	0
BN	0	0
BO	0	0
BP	0	0
BQ	0	0
BR	0	0
BS	0	0
BT	0	0
BU	0	0
BV	0	0
BW	0	0
BX	0	0
BY	0	0
BZ	0	0
A'	0	0
B'	0	0
C'	0	0
D'	0	0
E'	0	0
CA	0	0
CB	0	0
CC	0	0
CD	0	0
CE	0	0
CG	0	0
CH	0	0
CJ	0	0
CL	0	0
CM	0	0
CN	0	0
CO	0	0
CP	0	0
CQ	0	0
CS	0	0
CT	0	0

Imatge 104. Taules de l'optimització de la línia B81. *Font pròpia*

BX	V	1	1
BY	BZ	1	1
BZ	AA	1	1
BZ	AB	0,5	
A'	R	1	
B'	AO	1	
C'	CC	1	
D'	BU	1	
D'	BV	1	1
E'	BA	1	
CA	CB	1	
CB	C'	1	
CC	E'	1	
CD	AL	2	
CG	CH	1	
CH	CJ	1	
CJ	CL	1	1
CL	CM	1	1
CM	CO	1	
CM	CN	1	1
CN	BP	2	1
CN	N	2	
CO	CN	0,5	
CP	CQ	1	
CQ	CS	1,5	
CS	N	2	
CS	CT	1	
CT	CU	1	
CU	CV	1	
CV	CW	1	
CW	BR	1	
CX	CY	1	
CY	BV	2	
CZ	DA	2	
DA	DB	1	
DB	AR	1	
DC	Y	2	
DD	AL	2	
DE	CS	2	

CU	0	0
CV	0	0
CW	0	0
CX	0	0
CY	0	0
CZ	0	0
DA	0	0
DB	0	0
DC	0	0
DD	0	0
DE	0	0

DISTÀNCIA MÍNIMA	23,5

Imatge 105. Taules de l'optimització de la línia B81. *Font pròpia*

- LÍNIA B82

DES DE	FINS A	DISTÀNCIA	BINARI
A	B	1	
B	C	1	
C	CJ	1,5	
C	D	1	
D	E	1	
E	F	1	
F	G	0,5	
G	H	0,5	
H	I	1	
I	J	0,5	
J	K	1	
K	L	1	
K	BO	1	
L	CG	1	
L	M	0,5	
M	BP	1	
M	N	1	
N	P	1,5	
P	Q	1	
Q	A'	1	
Q	CA	1	
Q	AM	1	
R	S	2	
S	T	2	
T	U	2	
U	V	1	
V	BX	1	
V	AP	2	
V	W	2	
W	X	0,5	
W	BY	1	
X	Y	1	
Y	W	2	
Y	Z	1	
Z	AA	1	
AA	AB	2	
AC	AD	1	
AD	AE	0,5	
AE	AF	1	
AF	P	1	
AF	AG	1	
AG	AH	1	
AH	AU	2	
AU	AI	1	
AI	AJ	2	
AJ	AK	1	
AK	AL	1	
AL	AM	1	
AL	CA	1	

VÈRTEX	FLUX	CONDICIÓ
A	0	0
B	0	0
C	0	0
D	0	0
E	0	0
F	0	0
G	0	0
H	0	0
I	0	0
J	0	0
K	0	0
L	0	0
M	0	0
N	0	0
P	0	0
Q	0	0
R	0	0
S	0	0
T	0	0
U	0	0
V	0	0
W	0	0
X	0	0
Y	0	0
Z	0	0
AA	0	0
AB	0	0
AC	0	0
AD	0	0
AE	0	0
AF	0	0
AG	0	0
AH	0	0
AI	0	0
AJ	0	0
AK	0	0
AL	0	0
AM	0	0
AN	0	0
AO	0	0
AP	0	0
AQ	0	0
AR	0	0
AS	0	0
AT	0	0
AU	0	0
AV	0	0
AW	0	0
AX	0	0

Imatge 106. Taules de l'optimització de la línia B82. *Font pròpia*

AM	AN	1	
AN	V	3	
AN	B'	1	
AO	BX	1	
AO	V	1	
AP	AQ	1	
AQ	AR	1	
AR	AS	1	
AS	DC	1	
AS	AT	1	
AT	AV	2	
AV	AW	1	
AW	AX	1	
AX	AY	1	
AY	AZ	1	
AZ	BA	1	
BA	CX	1	
BA	CE	1	1
BA	BB	2	
BB	BC	1	
BC	BD	1	
BD	BE	1	
BE	BF	2	
BF	BG	2	
BH	BI	2	
BI	AD	2	
BJ	BK	0,5	
BK	BL	0,5	
BL	BM	1	
BM	BN	0,5	
BN	AF	1	
BN	BO	0,5	
BO	BN	0,5	
BO	K	1	
BP	CP	1	
BP	BQ	1	
BQ	BR	1	
BR	BS	1	1
BS	BT	1	1
BT	CC	1	1
BT	BU	1	
BU	CC	1	
BU	D'	1	
BV	D'	1	
BV	CZ	1	
BV	BW	1	
BW	BV	1	
BW	BX	1	
BX	BW	1	

AY	0	0
AZ	0	0
BA	0	0
BB	0	0
BC	0	0
BD	0	0
BE	0	0
BF	0	0
BG	0	0
BH	0	0
BI	0	0
BJ	0	0
BK	0	0
BL	0	0
BM	0	0
BN	0	0
BO	0	0
BP	0	0
BQ	0	0
BR	0	0
BS	0	0
BT	0	0
BU	0	0
BV	0	0
BW	0	0
BX	0	0
BY	0	0
BZ	0	0
A'	0	0
B'	0	0
C'	0	0
D'	0	0
E'	0	0
CA	0	0
CB	0	0
CC	0	0
CD	0	0
CE	-1	-1
CG	0	0
CH	0	0
CJ	0	0
CL	0	0
CM	0	0
CN	0	0
CO	0	0
CP	0	0
CQ	0	0
CS	0	0
CT	0	0

Imatge 107. Taules de l'optimització de la línia B82. *Font pròpia*

BX	V	1	
BY	BZ	1	
BZ	AA	1	
BZ	AB	0,5	
A'	R	1	
B'	AO	1	
C'	CC	1	
D'	BU	1	
D'	BV	1	
E'	BA	1	1
CA	CB	1	
CB	C'	1	
CC	E'	1	1
CD	AL	2	
CG	CH	1	
CH	CJ	1	
CJ	CL	1	
CL	CM	1	
CM	CO	1	
CM	CN	1	
CN	BP	2	
CN	N	2	
CO	CN	0,5	
CP	CQ	1	
CQ	CS	1,5	
CS	N	2	
CS	CT	1	1
CT	CU	1	1
CU	CV	1	1
CV	CW	1	1
CW	BR	1	1
CX	CY	1	
CY	BV	2	
CZ	DA	2	
DA	DB	1	
DB	AR	1	
DC	Y	2	
DD	AL	2	
DE	CS	2	1

CU	0	0
CV	0	0
CW	0	0
CX	0	0
CY	0	0
CZ	0	0
DA	0	0
DB	0	0
DC	0	0
DD	0	0
DE	1	1

DISTÀNCIA MÍNIMA	13

Imatge 108. Taules de l'optimització de la línia B82. *Font pròpia*

- LÍNIA B18

DES DE	FINS A	DISTÀNCIA	BINARI
A	B	1	
B	C	1	
C	CJ	1,5	
C	D	1	
D	E	1	
E	F	1	
F	G	0,5	
G	H	0,5	
H	I	1	
I	J	0,5	
J	K	1	
K	L	1	
K	BO	1	
L	CG	1	
L	M	0,5	
M	BP	1	
M	N	1	
N	P	1,5	
P	Q	1	1
Q	A'	1	
Q	CA	1	
Q	AM	1	1
R	S	2	
S	T	2	
T	U	2	
U	V	1	
V	BX	1	
V	AP	2	
V	W	2	
W	X	0,5	
W	BY	1	
X	Y	1	
Y	W	2	
Y	Z	1	
Z	AA	1	
AA	AB	2	
AC	AD	1	
AD	AE	0,5	1
AE	AF	1	1
AF	P	1	1
AF	AG	1	
AG	AH	1	
AH	AU	2	
AU	AI	1	
AI	AJ	2	
AJ	AK	1	
AK	AL	1	
AL	AM	1	
AL	CA	1	

VÈRTEX	FLUX	CONDICIÓ
A	0	0
B	0	0
C	0	0
D	0	0
E	0	0
F	0	0
G	0	0
H	0	0
I	0	0
J	0	0
K	0	0
L	0	0
M	0	0
N	0	0
P	0	0
Q	0	0
R	0	0
S	0	0
T	0	0
U	0	0
V	0	0
W	0	0
X	0	0
Y	0	0
Z	0	0
AA	0	0
AB	0	0
AC	0	0
AD	0	0
AE	0	0
AF	0	0
AG	0	0
AH	0	0
AI	0	0
AJ	0	0
AK	0	0
AL	0	0
AM	0	0
AN	0	0
AO	-1	-1
AP	0	0
AQ	0	0
AR	0	0
AS	0	0
AT	0	0
AU	0	0
AV	0	0
AW	0	0
AX	0	0

Imatge 109. Taules de l'optimització de la línia B18. *Font pròpia*

AM	AN	1	1
AN	V	3	
AN	B'	1	1
AO	BX	1	
AO	V	1	
AP	AQ	1	
AQ	AR	1	
AR	AS	1	
AS	DC	1	
AS	AT	1	
AT	AV	2	
AV	AW	1	
AW	AX	1	
AX	AY	1	
AY	AZ	1	
AZ	BA	1	
BA	CX	1	
BA	CE	1	
BA	BB	2	
BB	BC	1	
BC	BD	1	
BD	BE	1	
BE	BF	2	
BF	BG	2	
BH	BI	2	1
BI	AD	2	1
BJ	BK	0,5	
BK	BL	0,5	
BL	BM	1	
BM	BN	0,5	
BN	AF	1	
BN	BO	0,5	
BO	BN	0,5	
BO	K	1	
BP	CP	1	
BP	BQ	1	
BQ	BR	1	
BR	BS	1	
BS	BT	1	
BT	CC	1	
BT	BU	1	
BU	CC	1	
BU	D'	1	
BV	D'	1	
BV	CZ	1	
BV	BW	1	
BW	BV	1	
BW	BX	1	

AY	0	0
AZ	0	0
BA	0	0
BB	0	0
BC	0	0
BD	0	0
BE	0	0
BF	0	0
BG	0	0
BH	1	1
BI	0	0
BJ	0	0
BK	0	0
BL	0	0
BM	0	0
BN	0	0
BO	0	0
BP	0	0
BQ	0	0
BR	0	0
BS	0	0
BT	0	0
BU	0	0
BV	0	0
BW	0	0
BX	0	0
BY	0	0
BZ	0	0
A'	0	0
B'	0	0
C'	0	0
D'	0	0
E'	0	0
CA	0	0
CB	0	0
CC	0	0
CD	0	0
CE	0	0
CG	0	0
CH	0	0
CJ	0	0
CL	0	0
CM	0	0
CN	0	0
CO	0	0
CP	0	0
CQ	0	0
CS	0	0

Imatge 110. Taules de l’optimització de la línia B18. *Font pròpia*

BX	BW	1	
BX	V	1	
BY	BZ	1	
BZ	AA	1	
BZ	AB	0,5	
A'	R	1	
B'	AO	1	1
C'	CC	1	
D'	BU	1	
D'	BV	1	
E'	BA	1	
CA	CB	1	
CB	C'	1	
CC	E'	1	
CD	AL	2	
CG	CH	1	
CH	CJ	1	
CJ	CL	1	
CL	CM	1	
CM	CO	1	
CM	CN	1	
CN	BP	2	
CN	N	2	
CO	CN	0,5	
CP	CQ	1	
CQ	CS	1,5	
CS	N	2	
CS	CT	1	
CT	CU	1	
CU	CV	1	
CV	CW	1	
CW	BR	1	
CX	CY	1	
CY	BV	2	
CZ	DA	2	
DA	DB	1	
DB	AR	1	
DC	Y	2	
DD	AL	2	
DE	CS	2	

CT	0	0
CU	0	0
CV	0	0
CW	0	0
CX	0	0
CY	0	0
CZ	0	0
DA	0	0
DB	0	0
DC	0	0
DD	0	0
DE	0	0

DISTÀNCIA MÍNIMA	11,5

Imatge 111. Taules de l’optimització de la línia B18. *Font pròpia*

- LÍNIA B15

DES DE	FINS A	DISTÀNCIA	BINARI
A	B	1	
B	C	1	
C	CJ	1,5	
C	D	1	
D	E	1	
E	F	1	
F	G	0,5	
G	H	0,5	
H	I	1	
I	J	0,5	
J	K	1	
K	L	1	
K	BO	1	
L	CG	1	
L	M	0,5	
M	BP	1	
M	N	1	
N	P	1,5	
P	Q	1	1
Q	A'	1	
Q	CA	1	
Q	AM	1	1
R	S	2	
S	T	2	
T	U	2	
U	V	1	
V	BX	1	
V	AP	2	1
V	W	2	
W	X	0,5	
W	BY	1	
X	Y	1	
Y	W	2	
Y	Z	1	
Z	AA	1	
AA	AB	2	
AC	AD	1	1
AD	AE	0,5	1
AE	AF	1	1
AF	P	1	1
AF	AG	1	
AG	AH	1	
AH	AU	2	
AU	AI	1	
AI	AJ	2	
AJ	AK	1	
AK	AL	1	
AL	AM	1	
AL	CA	1	

VÈRTEX	FLUX	CONDICIÓ
A	0	0
B	0	0
C	0	0
D	0	0
E	0	0
F	0	0
G	0	0
H	0	0
I	0	0
J	0	0
K	0	0
L	0	0
M	0	0
N	0	0
P	0	0
Q	0	0
R	0	0
S	0	0
T	0	0
U	0	0
V	0	0
W	0	0
X	0	0
Y	0	0
Z	0	0
AA	0	0
AB	0	0
AC	1	1
AD	0	0
AE	0	0
AF	0	0
AG	0	0
AH	0	0
AI	0	0
AJ	0	0
AK	0	0
AL	0	0
AM	0	0
AN	0	0
AO	0	0
AP	0	0
AQ	0	0
AR	0	0
AS	0	0
AT	0	0
AU	0	0
AV	0	0
AW	0	0
AX	0	0

Imatge 112. Taules de l'optimització de la línia B15. *Font pròpia*

AM	AN	1	1
AN	V	3	
AN	B'	1	1
AO	BX	1	
AO	V	1	1
AP	AQ	1	1
AQ	AR	1	1
AR	AS	1	1
AS	DC	1	
AS	AT	1	1
AT	AV	2	1
AV	AW	1	1
AW	AX	1	1
AX	AY	1	1
AY	AZ	1	1
AZ	BA	1	1
BA	CX	1	
BA	CE	1	
BA	BB	2	1
BB	BC	1	1
BC	BD	1	1
BD	BE	1	1
BE	BF	2	1
BF	BG	2	1
BH	BI	2	
BI	AD	2	
BJ	BK	0,5	
BK	BL	0,5	
BL	BM	1	
BM	BN	0,5	
BN	AF	1	
BN	BO	0,5	
BO	BN	0,5	
BO	K	1	
BP	CP	1	
BP	BQ	1	
BQ	BR	1	
BR	BS	1	
BS	BT	1	
BT	CC	1	
BT	BU	1	
BU	CC	1	
BU	D'	1	
BV	D'	1	
BV	CZ	1	
BV	BW	1	
BW	BV	1	
BW	BX	1	
BX	BW	1	

AY	0	0
AZ	0	0
BA	0	0
BB	0	0
BC	0	0
BD	0	0
BE	0	0
BF	0	0
BG	-1	-1
BH	0	0
BI	0	0
BJ	0	0
BK	0	0
BL	0	0
BM	0	0
BN	0	0
BO	0	0
BP	0	0
BQ	0	0
BR	0	0
BS	0	0
BT	0	0
BU	0	0
BV	0	0
BW	0	0
BX	0	0
BY	0	0
BZ	0	0
A'	0	0
B'	0	0
C'	0	0
D'	0	0
E'	0	0
CA	0	0
CB	0	0
CC	0	0
CD	0	0
CE	0	0
CG	0	0
CH	0	0
CJ	0	0
CL	0	0
CM	0	0
CN	0	0
CO	0	0
CP	0	0
CQ	0	0
CS	0	0
CT	0	0

Imatge 113. Taules de l'optimització de la línia B15. *Font pròpia*

BX	V	1	
BY	BZ	1	
BZ	AA	1	
BZ	AB	0,5	
A'	R	1	
B'	AO	1	1
C'	CC	1	
D'	BU	1	
D'	BV	1	
E'	BA	1	
CA	CB	1	
CB	C'	1	
CC	E'	1	
CD	AL	2	
CG	CH	1	
CH	CJ	1	
CJ	CL	1	
CL	CM	1	
CM	CO	1	
CM	CN	1	
CN	BP	2	
CN	N	2	
CO	CN	0,5	
CP	CQ	1	
CQ	CS	1,5	
CS	N	2	
CS	CT	1	
CT	CU	1	
CU	CV	1	
CV	CW	1	
CW	BR	1	
CX	CY	1	
CY	BV	2	
CZ	DA	2	
DA	DB	1	
DB	AR	1	
DC	Y	2	
DD	AL	2	
DE	CS	2	

CU	0	0
CV	0	0
CW	0	0
CX	0	0
CY	0	0
CZ	0	0
DA	0	0
DB	0	0
DC	0	0
DD	0	0
DE	0	0

DISTÀNCIA MÍNIMA	31,5

Imatge 114. Taules de l'optimització de la línia B15. *Font pròpia*

- LÍNIA B20

DES DE	FINS A	DISTÀNCIA	BINARI
A	B	1	
B	C	1	
C	CJ	1,5	
C	D	1	
D	E	1	
E	F	1	
F	G	0,5	
G	H	0,5	
H	I	1	
I	J	0,5	
J	K	1	
K	L	1	
K	BO	1	
L	CG	1	
L	M	0,5	
M	BP	1	
M	N	1	
N	P	1,5	
P	Q	1	1
Q	A'	1	1
Q	CA	1	
Q	AM	1	
R	S	2	1
S	T	2	1
T	U	2	1
U	V	1	1
V	BX	1	
V	AP	2	
V	W	2	1
W	X	0,5	
W	BY	1	1
X	Y	1	
Y	W	2	
Y	Z	1	
Z	AA	1	
AA	AB	2	
AC	AD	1	
AD	AE	0,5	
AE	AF	1	
AF	P	1	1
AF	AG	1	
AG	AH	1	
AH	AU	2	
AU	AI	1	
AI	AJ	2	
AJ	AK	1	
AK	AL	1	
AL	AM	1	
AL	CA	1	

VÈRTEX	FLUX	CONDICIÓ
A	0	0
B	0	0
C	0	0
D	0	0
E	0	0
F	0	0
G	0	0
H	0	0
I	0	0
J	0	0
K	0	0
L	0	0
M	0	0
N	0	0
P	0	0
Q	0	0
R	0	0
S	0	0
T	0	0
U	0	0
V	0	0
W	0	0
X	0	0
Y	0	0
Z	0	0
AA	0	0
AB	-1	-1
AC	0	0
AD	0	0
AE	0	0
AF	0	0
AG	0	0
AH	0	0
AI	0	0
AJ	0	0
AK	0	0
AL	0	0
AM	0	0
AN	0	0
AO	0	0
AP	0	0
AQ	0	0
AR	0	0
AS	0	0
AT	0	0
AU	0	0
AV	0	0
AW	0	0
AX	0	0

Imatge 115. Taules de l'optimització de la línia B20. *Font pròpia*

AM	AN	1	
AN	V	3	
AN	B'	1	
AO	BX	1	
AO	V	1	
AP	AQ	1	
AQ	AR	1	
AR	AS	1	
AS	DC	1	
AS	AT	1	
AT	AV	2	
AV	AW	1	
AW	AX	1	
AX	AY	1	
AY	AZ	1	
AZ	BA	1	
BA	CX	1	
BA	CE	1	
BA	BB	2	
BB	BC	1	
BC	BD	1	
BD	BE	1	
BE	BF	2	
BF	BG	2	
BH	BI	2	
BI	AD	2	
BJ	BK	0,5	1
BK	BL	0,5	1
BL	BM	1	1
BM	BN	0,5	1
BN	AF	1	1
BN	BO	0,5	
BO	BN	0,5	
BO	K	1	
BP	CP	1	
BP	BQ	1	
BQ	BR	1	
BR	BS	1	
BS	BT	1	
BT	CC	1	
BT	BU	1	
BU	CC	1	
BU	D'	1	
BV	D'	1	
BV	CZ	1	
BV	BW	1	
BW	BV	1	

AY	0	0
AZ	0	0
BA	0	0
BB	0	0
BC	0	0
BD	0	0
BE	0	0
BF	0	0
BG	0	0
BH	0	0
BI	0	0
BJ	1	1
BK	0	0
BL	0	0
BM	0	0
BN	0	0
BO	0	0
BP	0	0
BQ	0	0
BR	0	0
BS	0	0
BT	0	0
BU	0	0
BV	0	0
BW	0	0
BX	0	0
BY	0	0
BZ	0	0
A'	0	0
B'	0	0
C'	0	0
D'	0	0
E'	0	0
CA	0	0
CB	0	0
CC	0	0
CD	0	0
CE	0	0
CG	0	0
CH	0	0
CJ	0	0
CL	0	0
CM	0	0
CN	0	0
CO	0	0
CP	0	0
CQ	0	0

Imatge 116. Taules de l'optimització de la línia B20. *Font pròpia*

BW	BX	1	
BX	BW	1	
BX	V	1	
BY	BZ	1	1
BZ	AA	1	
BZ	AB	0,5	1
A'	R	1	1
B'	AO	1	
C'	CC	1	
D'	BU	1	
D'	BV	1	
E'	BA	1	
CA	CB	1	
CB	C'	1	
CC	E'	1	
CD	AL	2	
CG	CH	1	
CH	CJ	1	
CJ	CL	1	
CL	CM	1	
CM	CO	1	
CM	CN	1	
CN	BP	2	
CN	N	2	
CO	CN	0,5	
CP	CQ	1	
CQ	CS	1,5	
CS	N	2	
CS	CT	1	
CT	CU	1	
CU	CV	1	
CV	CW	1	
CW	BR	1	
CX	CY	1	
CY	BV	2	
CZ	DA	2	
DA	DB	1	
DB	AR	1	
DC	Y	2	
DD	AL	2	
DE	CS	2	

CS	0	0
CT	0	0
CU	0	0
CV	0	0
CW	0	0
CX	0	0
CY	0	0
CZ	0	0
DA	0	0
DB	0	0
DC	0	0
DD	0	0
DE	0	0

DISTÀNCIA MÍNIMA	19

Imatge 117. Taules de l'optimització de la línia B20. *Font pròpia*

- LÍNIA M19

DES DE	FINS A	DISTÀNCIA	BINARI
A	B	1	
B	C	1	
C	CJ	1,5	
C	D	1	
D	E	1	
E	F	1	
F	G	0,5	
G	H	0,5	
H	I	1	
I	J	0,5	
J	K	1	
K	L	1	
K	BO	1	
L	CG	1	
L	M	0,5	
M	BP	1	
M	N	1	
N	P	1,5	
P	Q	1	
Q	A'	1	
Q	CA	1	
Q	AM	1	
R	S	2	
S	T	2	
T	U	2	
U	V	1	
V	BX	1	
V	AP	2	
V	W	2	
W	X	0,5	
W	BY	1	
X	Y	1	
Y	W	2	
Y	Z	1	
Z	AA	1	
AA	AB	2	
AC	AD	1	
AD	AE	0,5	
AE	AF	1	
AF	P	1	
AF	AG	1	
AG	AH	1	
AH	AU	2	
AU	AI	1	
AI	AJ	2	
AJ	AK	1	
AK	AL	1	
AL	AM	1	
AL	CA	1	1

VÈRTEX	FLUX	CONDICIÓ
A	0	0
B	0	0
C	0	0
D	0	0
E	0	0
F	0	0
G	0	0
H	0	0
I	0	0
J	0	0
K	0	0
L	0	0
M	0	0
N	0	0
P	0	0
Q	0	0
R	0	0
S	0	0
T	0	0
U	0	0
V	0	0
W	0	0
X	0	0
Y	0	0
Z	0	0
AA	0	0
AB	0	0
AC	0	0
AD	0	0
AE	0	0
AF	0	0
AG	0	0
AH	0	0
AI	0	0
AJ	0	0
AK	0	0
AL	0	0
AM	0	0
AN	0	0
AO	0	0
AP	0	0
AQ	0	0
AR	0	0
AS	0	0
AT	0	0
AU	0	0
AV	0	0
AW	0	0
AX	0	0

Imatge 118. Taules de l’optimització de la línia M19. *Font pròpia*

AM	AN	1	
AN	V	3	
AN	B'	1	
AO	BX	1	
AO	V	1	
AP	AQ	1	
AQ	AR	1	
AR	AS	1	
AS	DC	1	
AS	AT	1	
AT	AV	2	
AV	AW	1	
AW	AX	1	
AX	AY	1	
AY	AZ	1	
AZ	BA	1	
BA	CX	1	
BA	CE	1	1
BA	BB	2	
BB	BC	1	
BC	BD	1	
BD	BE	1	
BE	BF	2	
BF	BG	2	
BH	BI	2	
BI	AD	2	
BJ	BK	0,5	
BK	BL	0,5	
BL	BM	1	
BM	BN	0,5	
BN	AF	1	
BN	BO	0,5	
BO	BN	0,5	
BO	K	1	
BP	CP	1	
BP	BQ	1	
BQ	BR	1	
BR	BS	1	
BS	BT	1	
BT	CC	1	
BT	BU	1	
BU	CC	1	
BU	D'	1	
BV	D'	1	
BV	CZ	1	
BV	BW	1	
BW	BV	1	
BW	BX	1	
BX	BW	1	

AY	0	0
AZ	0	0
BA	0	0
BB	0	0
BC	0	0
BD	0	0
BE	0	0
BF	0	0
BG	0	0
BH	0	0
BI	0	0
BJ	0	0
BK	0	0
BL	0	0
BM	0	0
BN	0	0
BO	0	0
BP	0	0
BQ	0	0
BR	0	0
BS	0	0
BT	0	0
BU	0	0
BV	0	0
BW	0	0
BX	0	0
BY	0	0
BZ	0	0
A'	0	0
B'	0	0
C'	0	0
D'	0	0
E'	0	0
CA	0	0
CB	0	0
CC	0	0
CD	0	0
CE	-1	-1
CG	0	0
CH	0	0
CJ	0	0
CL	0	0
CM	0	0
CN	0	0
CO	0	0
CP	0	0
CQ	0	0
CS	0	0
CT	0	0

Imatge 119. Taules de l’optimització de la línia M19. *Font pròpia*

BX	V	1	
BY	BZ	1	
BZ	AA	1	
BZ	AB	0,5	
A'	R	1	
B'	AO	1	
C'	CC	1	1
D'	BU	1	
D'	BV	1	
E'	BA	1	1
CA	CB	1	1
CB	C'	1	1
CC	E'	1	1
CD	AL	2	
CG	CH	1	
CH	CJ	1	
CJ	CL	1	
CL	CM	1	
CM	CO	1	
CM	CN	1	
CN	BP	2	
CN	N	2	
CO	CN	0,5	
CP	CQ	1	
CQ	CS	1,5	
CS	N	2	
CS	CT	1	
CT	CU	1	
CU	CV	1	
CV	CW	1	
CW	BR	1	
CX	CY	1	
CY	BV	2	
CZ	DA	2	
DA	DB	1	
DB	AR	1	
DC	Y	2	
DD	AL	2	1
DE	CS	2	

CU	0	0
CV	0	0
CW	0	0
CX	0	0
CY	0	0
CZ	0	0
DA	0	0
DB	0	0
DC	0	0
DD	1	1
DE	0	0

DISTÀNCIA MÍNIMA	9

Imatge 120. Taules de l'optimització de la línia M19. *Font pròpia*

- LÍNIA M27

DES DE	FINS A	DISTÀNCIA	BINARI
A	B	1	
B	C	1	
C	CJ	1,5	
C	D	1	
D	E	1	
E	F	1	
F	G	0,5	
G	H	0,5	
H	I	1	
I	J	0,5	
J	K	1	
K	L	1	
K	BO	1	
L	CG	1	
L	M	0,5	
M	BP	1	
M	N	1	
N	P	1,5	
P	Q	1	1
Q	A'	1	
Q	CA	1	1
Q	AM	1	
R	S	2	
S	T	2	
T	U	2	
U	V	1	
V	BX	1	
V	AP	2	
V	W	2	
W	X	0,5	
W	BY	1	
X	Y	1	
Y	W	2	
Y	Z	1	
Z	AA	1	
AA	AB	2	
AC	AD	1	
AD	AE	0,5	
AE	AF	1	
AF	P	1	1
AF	AG	1	
AG	AH	1	
AH	AU	2	
AU	AI	1	
AI	AJ	2	
AJ	AK	1	
AK	AL	1	
AL	AM	1	
AL	CA	1	

VÈRTEX	FLUX	CONDICIÓ
A	0	0
B	0	0
C	0	0
D	0	0
E	0	0
F	0	0
G	0	0
H	0	0
I	0	0
J	0	0
K	0	0
L	0	0
M	0	0
N	0	0
P	0	0
Q	0	0
R	0	0
S	0	0
T	0	0
U	0	0
V	0	0
W	0	0
X	0	0
Y	0	0
Z	0	0
AA	0	0
AB	0	0
AC	0	0
AD	0	0
AE	0	0
AF	0	0
AG	0	0
AH	0	0
AI	0	0
AJ	0	0
AK	0	0
AL	0	0
AM	0	0
AN	0	0
AO	0	0
AP	0	0
AQ	0	0
AR	0	0
AS	0	0
AT	0	0
AU	0	0
AV	0	0
AW	0	0
AX	0	0

Imatge 121. Taules de l'optimització de la línia M27. *Font pròpia*

AM	AN	1	
AN	V	3	
AN	B'	1	
AO	BX	1	
AO	V	1	
AP	AQ	1	
AQ	AR	1	
AR	AS	1	
AS	DC	1	
AS	AT	1	
AT	AV	2	
AV	AW	1	
AW	AX	1	
AX	AY	1	
AY	AZ	1	
AZ	BA	1	
BA	CX	1	
BA	CE	1	1
BA	BB	2	
BB	BC	1	
BC	BD	1	
BD	BE	1	
BE	BF	2	
BF	BG	2	
BH	BI	2	
BI	AD	2	
BJ	BK	0,5	1
BK	BL	0,5	1
BL	BM	1	1
BM	BN	0,5	1
BN	AF	1	1
BN	BO	0,5	
BO	BN	0,5	
BO	K	1	
BP	CP	1	
BP	BQ	1	
BQ	BR	1	
BR	BS	1	
BS	BT	1	
BT	CC	1	
BT	BU	1	
BU	CC	1	
BU	D'	1	
BV	D'	1	
BV	CZ	1	
BV	BW	1	
BW	BV	1	
BW	BK	1	
BX	BW	1	
BX	V	1	

AY	0	0
AZ	0	0
BA	0	0
BB	0	0
BC	0	0
BD	0	0
BE	0	0
BF	0	0
BG	0	0
BH	0	0
BI	0	0
BJ	1	1
BK	0	0
BL	0	0
BM	0	0
BN	0	0
BO	0	0
BP	0	0
BQ	0	0
BR	0	0
BS	0	0
BT	0	0
BU	0	0
BV	0	0
BW	0	0
BX	0	0
BY	0	0
BZ	0	0
A'	0	0
B'	0	0
C'	0	0
D'	0	0
E'	0	0
CA	0	0
CB	0	0
CC	0	0
CD	0	0
CE	-1	-1
CG	0	0
CH	0	0
CJ	0	0
CL	0	0
CM	0	0
CN	0	0
CO	0	0
CP	0	0
CQ	0	0
CS	0	0
CT	0	0
CU	0	0

Imatge 122. Taules de l'optimització de la línia M27. *Font pròpia*

BY	BZ	1	
BZ	AA	1	
BZ	AB	0,5	
A'	R	1	
B'	AO	1	
C'	CC	1	1
D'	BU	1	
D'	BV	1	
E'	BA	1	1
CA	CB	1	1
CB	C'	1	1
CC	E'	1	1
CD	AL	2	
CG	CH	1	
CH	CJ	1	
CJ	CL	1	
CL	CM	1	
CM	CO	1	
CM	CN	1	
CN	BP	2	
CN	N	2	
CO	CN	0,5	
CP	CQ	1	
CQ	CS	1,5	
CS	N	2	
CS	CT	1	
CT	CU	1	
CU	CV	1	
CV	CW	1	
CW	BR	1	
CX	CY	1	
CY	BV	2	
CZ	DA	2	
DA	DB	1	
DB	AR	1	
DC	Y	2	
DD	AL	2	
DE	CS	2	

CV	0	0
CW	0	0
CX	0	0
CY	0	0
CZ	0	0
DA	0	0
DB	0	0
DC	0	0
DD	0	0
DE	0	0

DISTÀNCIA MÍNIMA	12,5

Imatge 123. Taules de l'optimització de la línia M27. *Font pròpia*

- LÍNIA M28

DES DE	FINS A	DISTÀNCIA	BINARI
A	B	1	
B	C	1	
C	CI	1,5	
C	D	1	
D	E	1	
E	F	1	
F	G	0,5	
G	H	0,5	
H	I	1	
I	J	0,5	
J	K	1	
K	L	1	
K	BO	1	
L	CG	1	
L	M	0,5	
M	BP	1	
M	N	1	
N	P	1,5	
P	Q	1	
Q	A'	1	
Q	CA	1	
Q	AM	1	
R	S	2	
S	T	2	
T	U	2	
U	V	1	
V	BX	1	
V	AP	2	
V	W	2	
W	X	0,5	
W	BY	1	
X	Y	1	
Y	W	2	
Y	Z	1	
Z	AA	1	
AA	AB	2	
AC	AD	1	
AD	AE	0,5	
AE	AF	1	
AF	P	1	
AF	AG	1	
AG	AH	1	
AH	AU	2	
AU	AI	1	
AI	AJ	2	
AJ	AK	1	
AK	AL	1	
AL	AM	1	
AL	CA	1	1

VÈRTEX	FLUX	CONDICIÓ
A	0	0
B	0	0
C	0	0
D	0	0
E	0	0
F	0	0
G	0	0
H	0	0
I	0	0
J	0	0
K	0	0
L	0	0
M	0	0
N	0	0
P	0	0
Q	0	0
R	0	0
S	0	0
T	0	0
U	0	0
V	0	0
W	0	0
X	0	0
Y	0	0
Z	0	0
AA	0	0
AB	0	0
AC	0	0
AD	0	0
AE	0	0
AF	0	0
AG	0	0
AH	0	0
AI	0	0
AJ	0	0
AK	0	0
AL	0	0
AM	0	0
AN	0	0
AO	0	0
AP	0	0
AQ	0	0
AR	0	0
AS	0	0
AT	0	0
AU	0	0
AV	0	0
AW	0	0
AX	0	0

Imatge 124. Taules de l'optimització de la línia M28. *Font pròpia*

AM	AN	1	
AN	V	3	
AN	B'	1	
AO	BX	1	
AO	V	1	
AP	AQ	1	
AQ	AR	1	
AR	AS	1	
AS	DC	1	
AS	AT	1	
AT	AV	2	
AV	AW	1	
AW	AX	1	
AX	AY	1	
AY	AZ	1	
AZ	BA	1	
BA	CX	1	
BA	CE	1	1
BA	BB	2	
BB	BC	1	
BC	BD	1	
BD	BE	1	
BE	BF	2	
BF	BG	2	
BH	BI	2	
BI	AD	2	
BJ	BK	0,5	
BK	BL	0,5	
BL	BM	1	
BM	BN	0,5	
BN	AF	1	
BN	BO	0,5	
BO	BN	0,5	
BO	K	1	
BP	CP	1	
BP	BQ	1	
BQ	BR	1	
BR	BS	1	
BS	BT	1	
BT	CC	1	
BT	BU	1	
BU	CC	1	
BU	D'	1	
BV	D'	1	
BV	CZ	1	
BV	BW	1	
BW	BV	1	
BW	BX	1	
BX	BW	1	

AY	0	0
AZ	0	0
BA	0	0
BB	0	0
BC	0	0
BD	0	0
BE	0	0
BF	0	0
BG	0	0
BH	0	0
BI	0	0
BJ	0	0
BK	0	0
BL	0	0
BM	0	0
BN	0	0
BO	0	0
BP	0	0
BQ	0	0
BR	0	0
BS	0	0
BT	0	0
BU	0	0
BV	0	0
BW	0	0
BX	0	0
BY	0	0
BZ	0	0
A'	0	0
B'	0	0
C'	0	0
D'	0	0
E'	0	0
CA	0	0
CB	0	0
CC	0	0
CD	0	0
CE	-1	-1
CG	0	0
CH	0	0
CJ	0	0
CL	0	0
CM	0	0
CN	0	0
CO	0	0
CP	0	0
CQ	0	0
CS	0	0
CT	0	0

Imatge 125. Taules de l'optimització de la línia M28. *Font pròpia*

BX	V	1	
BY	BZ	1	
BZ	AA	1	
BZ	AB	0,5	
A'	R	1	
B'	AO	1	
C'	CC	1	1
D'	BU	1	
D'	BV	1	
E'	BA	1	1
CA	CB	1	1
CB	C'	1	1
CC	E'	1	1
CD	AL	2	
CG	CH	1	
CH	CJ	1	
CJ	CL	1	
CL	CM	1	
CM	CO	1	
CM	CN	1	
CN	BP	2	
CN	N	2	
CO	CN	0,5	
CP	CQ	1	
CQ	CS	1,5	
CS	N	2	
CS	CT	1	
CT	CU	1	
CU	CV	1	
CV	CW	1	
CW	BR	1	
CX	CY	1	
CY	BV	2	
CZ	DA	2	
DA	DB	1	
DB	AR	1	
DC	Y	2	
DD	AL	2	1
DE	CS	2	

DISTÀNCIA MÍNIMA	9

CU	0	0
CV	0	0
CW	0	0
CX	0	0
CY	0	0
CZ	0	0
DA	0	0
DB	0	0
DC	0	0
DD	1	1
DE	0	0

Imatge 126. Taules de l'optimització de la línia M28. *Font pròpia*

- LÍNIA M30

DES DE	FINS A	DISTÀNCIA	BINARI
A	B	1	
B	C	1	
C	CJ	1,5	
C	D	1	
D	E	1	
E	F	1	1
F	G	0,5	1
G	H	0,5	1
H	I	1	1
I	J	0,5	1
J	K	1	1
K	L	1	1
K	BO	1	
L	CG	1	
L	M	0,5	1
M	BP	1	
M	N	1	1
N	P	1,5	1
P	Q	1	1
Q	A'	1	
Q	CA	1	
Q	AM	1	1
R	S	2	
S	T	2	
T	U	2	
U	V	1	
V	BX	1	
V	AP	2	
V	W	2	1
W	X	0,5	
W	BY	1	1
X	Y	1	
Y	W	2	
Y	Z	1	
Z	AA	1	
AA	AB	2	
AC	AD	1	
AD	AE	0,5	
AE	AF	1	
AF	P	1	
AF	AG	1	
AG	AH	1	
AH	AU	2	
AU	AI	1	
AI	AJ	2	
AJ	AK	1	
AK	AL	1	
AL	AM	1	
AL	CA	1	

VÈRTEX	FLUX	CONDICIÓ
A	0	0
B	0	0
C	0	0
D	0	0
E	1	1
F	0	0
G	0	0
H	0	0
I	0	0
J	0	0
K	0	0
L	0	0
M	0	0
N	0	0
P	0	0
Q	0	0
R	0	0
S	0	0
T	0	0
U	0	0
V	0	0
W	0	0
X	0	0
Y	0	0
Z	0	0
AA	0	0
AB	-1	-1
AC	0	0
AD	0	0
AE	0	0
AF	0	0
AG	0	0
AH	0	0
AI	0	0
AJ	0	0
AK	0	0
AL	0	0
AM	0	0
AN	0	0
AO	0	0
AP	0	0
AQ	0	0
AR	0	0
AS	0	0
AT	0	0
AU	0	0
AV	0	0
AW	0	0
AX	0	0

Imatge 127. Taules de l'optimització de la línia M30. *Font pròpia*

AM	AN	1	1
AN	V	3	
AN	B'	1	1
AO	BX	1	
AO	V	1	1
AP	AQ	1	
AQ	AR	1	
AR	AS	1	
AS	DC	1	
AS	AT	1	
AT	AV	2	
AV	AW	1	
AW	AX	1	
AX	AY	1	
AY	AZ	1	
AZ	BA	1	
BA	CX	1	
BA	CE	1	
BA	BB	2	
BB	BC	1	
BC	BD	1	
BD	BE	1	
BE	BF	2	
BF	BG	2	
BH	BI	2	
BI	AD	2	
BJ	BK	0,5	
BK	BL	0,5	
BL	BM	1	
BM	BN	0,5	
BN	AF	1	
BN	BO	0,5	
BO	BN	0,5	
BO	K	1	
BP	CP	1	
BP	BQ	1	
BQ	BR	1	
BR	BS	1	
BS	BT	1	
BT	CC	1	
BT	BU	1	
BU	CC	1	
BU	D'	1	
BV	D'	1	
BV	CZ	1	
BV	BW	1	
BW	BV	1	
BW	BX	1	
BX	BW	1	
BX	V	1	

AY	0	0
AZ	0	0
BA	0	0
BB	0	0
BC	0	0
BD	0	0
BE	0	0
BF	0	0
BG	0	0
BH	0	0
BI	0	0
BJ	0	0
BK	0	0
BL	0	0
BM	0	0
BN	0	0
BO	0	0
BP	0	0
BQ	0	0
BR	0	0
BS	0	0
BT	0	0
BU	0	0
BV	0	0
BW	0	0
BX	0	0
BY	0	0
BZ	0	0
A'	0	0
B'	0	0
C'	0	0
D'	0	0
E'	0	0
CA	0	0
CB	0	0
CC	0	0
CD	0	0
CE	0	0
CG	0	0
CH	0	0
CJ	0	0
CL	0	0
CM	0	0
CN	0	0
CO	0	0
CP	0	0
CQ	0	0
CS	0	0
CT	0	0
CU	0	0

Imatge 128. Taules de l'optimització de la línia M30. *Font pròpia*

BY	BZ	1	1
BZ	AA	1	
BZ	AB	0,5	1
A'	R	1	
B'	AO	1	1
C'	CC	1	
D'	BU	1	
D'	BV	1	
E'	BA	1	
CA	CB	1	
CB	C'	1	
CC	E'	1	
CD	AL	2	
CG	CH	1	
CH	CJ	1	
CJ	CL	1	
CL	CM	1	
CM	CO	1	
CM	CN	1	
CN	BP	2	
CN	N	2	
CO	CN	0,5	
CP	CQ	1	
CQ	CS	1,5	
CS	N	2	
CS	CT	1	
CT	CU	1	
CU	CV	1	
CV	CW	1	
CW	BR	1	
CX	CY	1	
CY	BV	2	
CZ	DA	2	
DA	DB	1	
DB	AR	1	
DC	Y	2	
DD	AL	2	
DE	CS	2	

CV	0	0
CW	0	0
CX	0	0
CY	0	0
CZ	0	0
DA	0	0
DB	0	0
DC	0	0
DD	0	0
DE	0	0

DISTÀNCIA MÍNIMA	19

Imatge 129. Taules de l'optimització de la línia M30. *Font pròpia*

- LÍNIA V33

DES DE	FINS A	DISTÀNCIA	BINARI
A	B	1	
B	C	1	
C	CJ	1,5	
C	D	1	
D	E	1	
E	F	1	
F	G	0,5	
G	H	0,5	
H	I	1	
I	J	0,5	
J	K	1	
K	L	1	
K	BO	1	
L	CG	1	
L	M	0,5	
M	BP	1	
M	N	1	
N	P	1,5	
P	Q	1	
Q	A'	1	
Q	CA	1	
Q	AM	1	
R	S	2	
S	T	2	
T	U	2	
U	V	1	
V	BX	1	1
V	AP	2	
V	W	2	
W	X	0,5	
W	BY	1	
X	Y	1	
Y	W	2	
Y	Z	1	
Z	AA	1	
AA	AB	2	
AC	AD	1	
AD	AE	0,5	
AE	AF	1	
AF	P	1	
AF	AG	1	
AG	AH	1	
AH	AU	2	
AU	AI	1	
AI	AJ	2	
AJ	AK	1	
AK	AL	1	
AL	AM	1	1

VÈRTEX	FLUX	CONDICIÓ
A	0	0
B	0	0
C	0	0
D	0	0
E	0	0
F	0	0
G	0	0
H	0	0
I	0	0
J	0	0
K	0	0
L	0	0
M	0	0
N	0	0
P	0	0
Q	0	0
R	0	0
S	0	0
T	0	0
U	0	0
V	0	0
W	0	0
X	0	0
Y	0	0
Z	0	0
AA	0	0
AB	0	0
AC	0	0
AD	0	0
AE	0	0
AF	0	0
AG	0	0
AH	0	0
AI	0	0
AJ	0	0
AK	0	0
AL	0	0
AM	0	0
AN	0	0
AO	0	0
AP	0	0
AQ	0	0
AR	0	0
AS	0	0
AT	0	0
AU	0	0
AV	0	0
AW	0	0

Imatge 130. Taules de l'optimització de la línia V33. *Font pròpia*

AM	AN	1	1
AN	V	3	1
AN	B'	1	
AO	BX	1	
AO	V	1	
AP	AQ	1	
AQ	AR	1	
AR	AS	1	
AS	DC	1	
AS	AT	1	
AT	AV	2	
AV	AW	1	
AW	AX	1	
AX	AY	1	
AY	AZ	1	
AZ	BA	1	
BA	CX	1	
BA	CE	1	
BA	BB	2	
BB	BC	1	
BC	BD	1	
BD	BE	1	
BE	BF	2	
BF	BG	2	
BH	BI	2	
BI	AD	2	
BJ	BK	0,5	
BK	BL	0,5	
BL	BM	1	
BM	BN	0,5	
BN	AF	1	
BN	BO	0,5	
BO	BN	0,5	
BO	K	1	
BP	CP	1	
BP	BQ	1	
BQ	BR	1	
BR	BS	1	
BS	BT	1	
BT	CC	1	
BT	BU	1	
BU	CC	1	
BU	D'	1	
BV	D'	1	
BV	CZ	1	
BV	BW	1	
BW	BV	1	1

AY	0	0
AZ	0	0
BA	0	0
BB	0	0
BC	0	0
BD	0	0
BE	0	0
BF	0	0
BG	0	0
BH	0	0
BI	0	0
BJ	0	0
BK	0	0
BL	0	0
BM	0	0
BN	0	0
BO	0	0
BP	0	0
BQ	0	0
BR	0	0
BS	0	0
BT	0	0
BU	0	0
BV	-1	-1
BW	0	0
BX	0	0
BY	0	0
BZ	0	0
A'	0	0
B'	0	0
C'	0	0
D'	0	0
E'	0	0
CA	0	0
CB	0	0
CC	0	0
CD	1	1
CE	0	0
CG	0	0
CH	0	0
CJ	0	0
CL	0	0
CM	0	0
CN	0	0
CO	0	0
CP	0	0
CQ	0	0

Imatge 131. Taules de l'optimització de la línia V33. *Font pròpia*

BW	BV	1	1
BW	BX	1	
BX	BW	1	1
BX	V	1	
BY	BZ	1	
BZ	AA	1	
BZ	AB	0,5	
A'	R	1	
B'	AO	1	
C'	CC	1	
D'	BU	1	
D'	BV	1	
E'	BA	1	
CA	CB	1	
CB	C'	1	
CC	E'	1	
CD	AL	2	1
CG	CH	1	
CH	CJ	1	
CJ	CL	1	
CL	CM	1	
CM	CO	1	
CM	CN	1	
CN	BP	2	
CN	N	2	
CO	CN	0,5	
CP	CQ	1	
CQ	CS	1,5	
CS	N	2	
CS	CT	1	
CT	CU	1	
CU	CV	1	
CV	CW	1	
CW	BR	1	
CX	CY	1	
CY	BV	2	
CZ	DA	2	
DA	DB	1	
DB	AR	1	
DC	Y	2	
DD	AL	2	
DE	CS	2	

DISTÀNCIA MÍNIMA	10

CQ	0	0
CS	0	0
CT	0	0
CU	0	0
CV	0	0
CW	0	0
CX	0	0
CY	0	0
CZ	0	0
DA	0	0
DB	0	0
DC	0	0
DD	0	0
DE	0	0

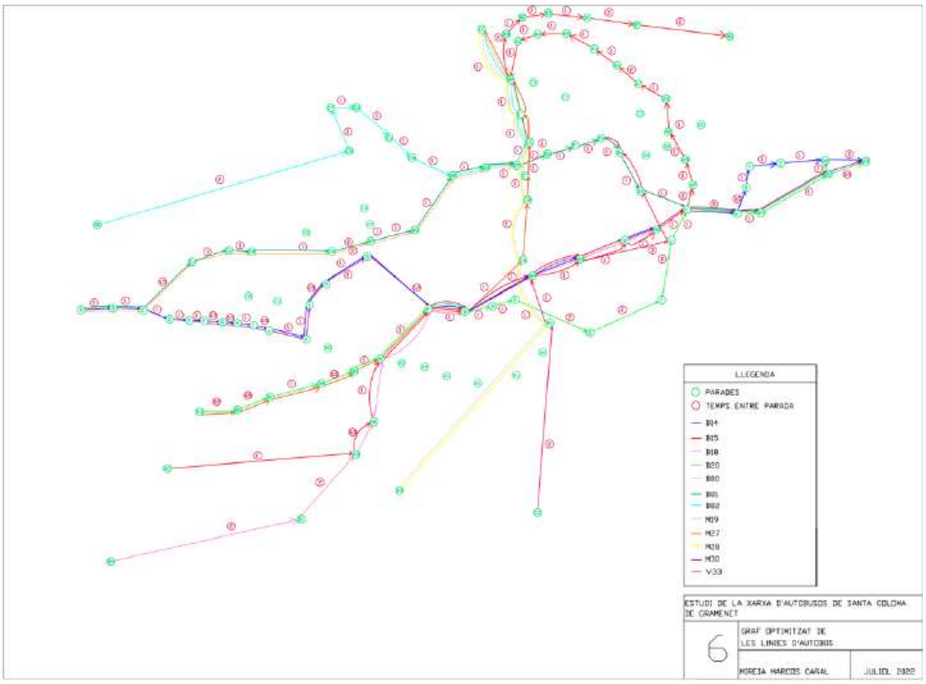
Imatge 132. Taules de l'optimització de la línia V33. *Font pròpia*

5.3. Estudi de la viabilitat dels resultats

En aquest apartat, s'estudiaran els resultats obtinguts i es determinarà si les solucions òptimes trobades prèviament podrien aplicar-se a la realitat.

Encara que hi hagi una ruta òptima entre dos punts, l'objectiu de la xarxa d'autobusos no és només reduir el temps invertit en el trajecte, sinó també cobrir totes les parades de la ciutat. Per tant, caldrà fer un estudi del nou graf (és a dir, el graf amb les parades i els temps optimitzats) per determinar si totes les parades continuen sent cobertes.

El plànol del graf optimitzat de les línies d'autobús (és a dir, amb els temps òptims) es pot veure a l'annex 2, i és el plànol 6. També es pot veure a la imatge 133, mostrada posteriorment.



Imatge 133. Plànol del graf optimitzat de les línies d'autobús.
Font pròpia

En aquest graf, podem apreciar que hi ha diverses parades que no són cobertes per cap línia, i això és un problema que s'hauria de solucionar per tal que la xarxa d'autobusos complís la seva funció. Les parades que no són cobertes per cap línia són: CH, CG, BO, AG, AH, AU, AI, AJ, AK, CO, CP, CQ, CX, CY, CZ, DA, DB, DC.

Per tal de resoldre aquest problema, s'han estudiat dues possibilitats per cobrir les parades restants:

- Creació de dos busos de barri: aquestes dues línies afegides seguirien una trajectòria cíclica, cobririen les parades que falten i tindrien connexions amb altres línies. Les parades AU i AI es canvien de vorera perquè així cobriran l'anada del bus. Aquesta proposta es veu reflectida a l'annex 2, plànol 7.
- Optimització d'algunes línies únicament: si deixem sense optimitzar determinades línies (M27, B81, M30 I B15) i allarguem la línia V33 per tal que no acabi en BV i acabi en CC (aniria de BV A D', de D' a BU, i de BU a CC, cosa que suposaria afegir tres minuts al trajecte), també se'ns

cobririen totes les línies. El plànol corresponent a aquesta proposta es troba a l'annex 2, plànol 8.

Per tal de decidir quina proposta és més adient i està més optimitzada, calcularé el temps total de tots els recorreguts de totes les línies, i escolliré la proposta que tingui un temps menor.

Per calcular el temps de la proposta dels busos de barri, sumaré els valors de totes les distàncies mínimes que vaig calcular amb l'Excel i sumaré els temps dels dos busos de barri afegits (un bus de barri triga 27,5 minuts en completar el seu recorregut i l'altre triga 19 minuts). En total, el sumatori dels temps de tots els recorreguts és de 247 minuts.

Per calcular el temps de la segona proposta, sumaré els valors de les línies optimitzades amb els valors de les línies sense optimitzar i amb els tres minuts afegits causats per l'allargament de la línia V33. El temps total és de 236,5 min.

Per tant, com que el temps de la segona proposta és menor que el de la primera, la segona proposta és l'òptima i és la que seleccionaré per representar amb la maqueta.

6. REPRESENTACIÓ D’UNA XARXA OPTIMITZADA

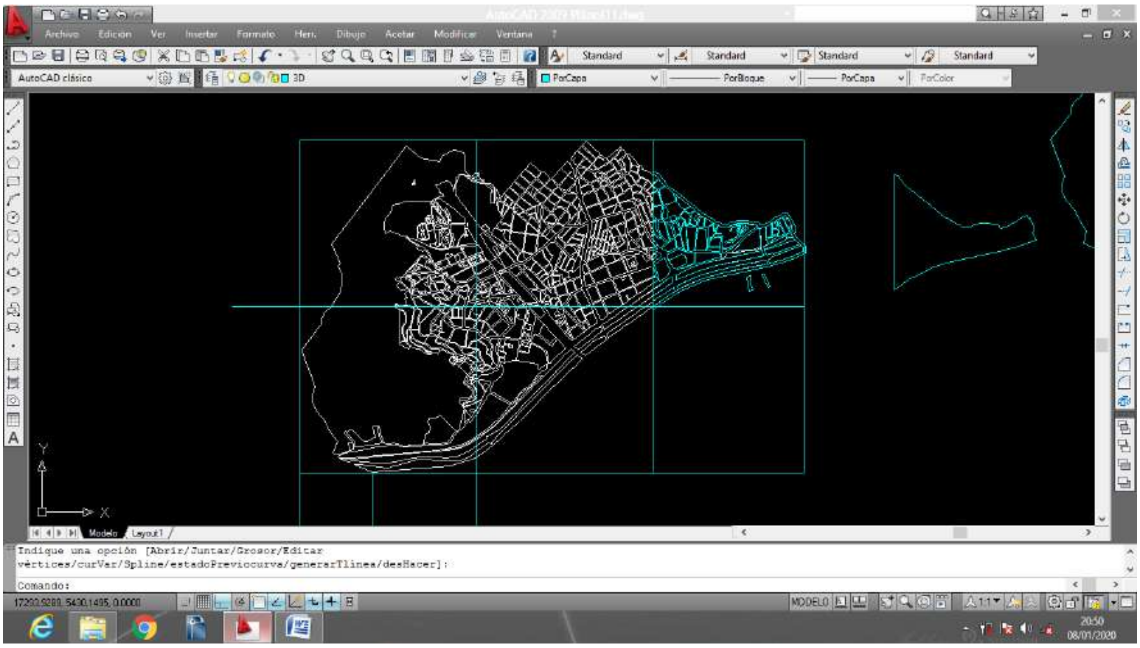
6.1. <u>Plànols</u>

Tant l’estudi de les línies com l’optimització de les mateixes s’han representant en plànols amb el programa AutoCAD. Els plànols es poden veure a l’annex 2.

6.2. <u>Maqueta</u>

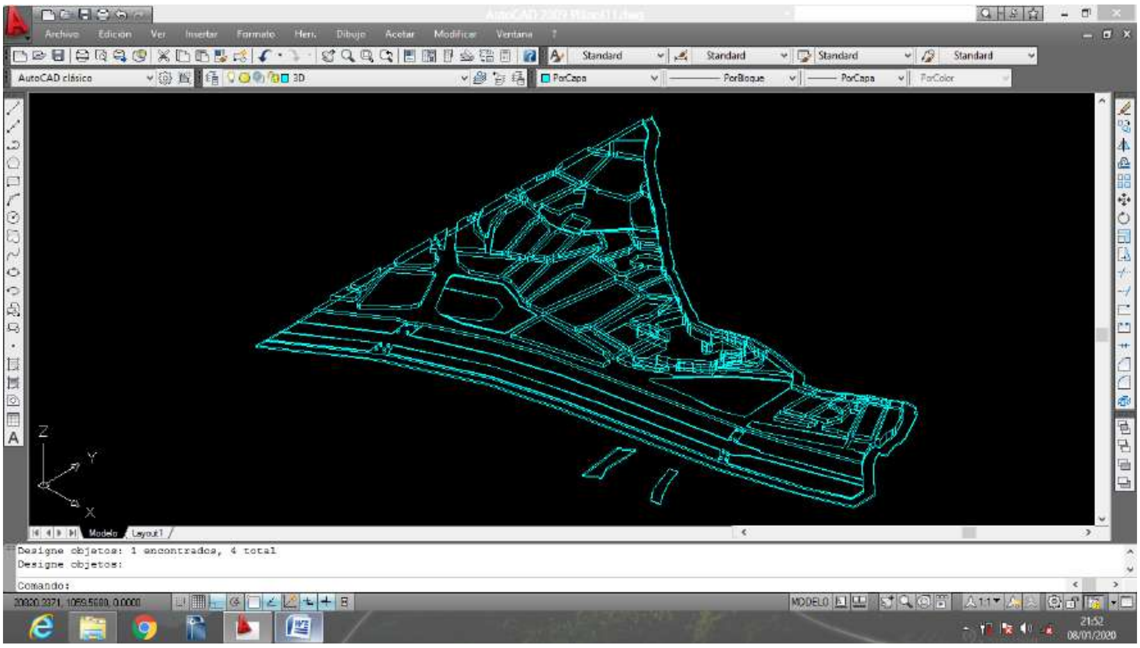
Per tal de fer una representació més visual, s’ha construït una maqueta en 3D. Com que la idea era poder representar el recorregut de les línies d’autobús a la maqueta, aquesta havia d’estar feta a l’escala adient per tal que els carrers fossin prou amples com per poder posar-hi els LEDs que representaran cada parada.

Primerament vaig dividir la ciutat en sis parts, per tal de poder fer parts que hi poguessin cabre a la impressora 3D. Un cop feta aquesta divisió, vaig anar transformant les línies en polilínies (s’observen de color blau a la imatge) amb l’ordre “editpol”, per tal de poder-li donar alçada posteriorment.



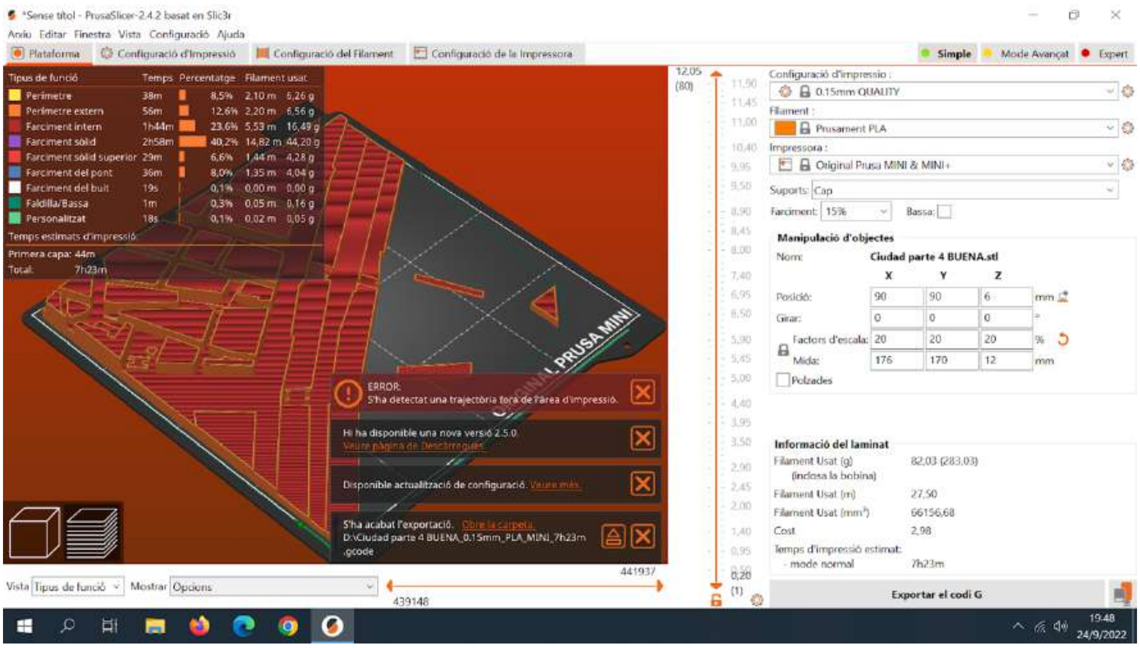
Imatge 133. Transformació de les línies en polilínies. *Font pròpia*

A continuació vaig donar diverses alçades als diferent elements amb l’ordre “extrusió”, tals com carrers, places, edificis... d’aquesta manera vaig anar fent la figura tridimensional.



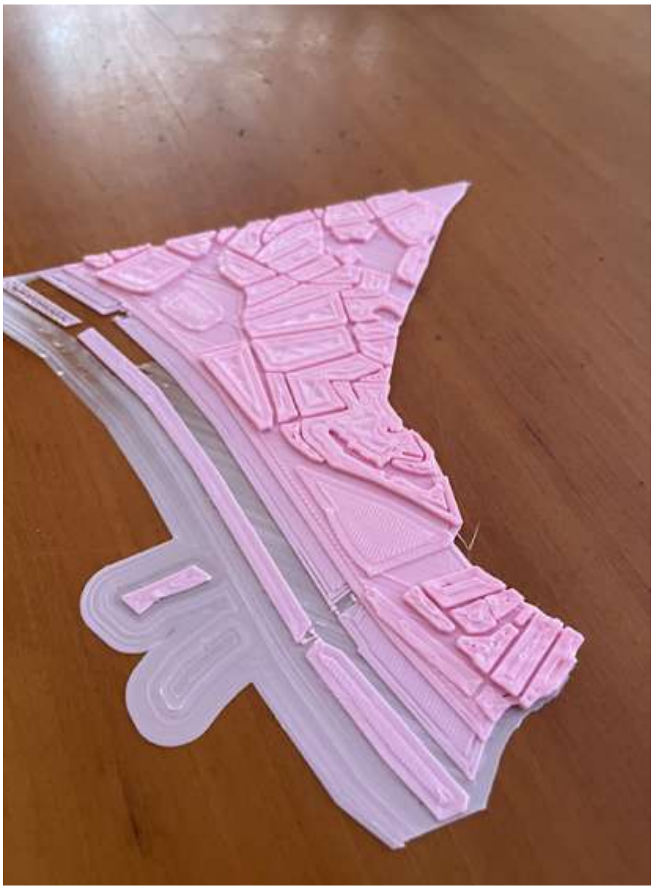
Imatge 134. Extrusió de les polilínies. *Font pròpia*

Abans de continuar realitzant la resta de la ciutat, vaig realitzar una prova amb la impressora 3D per veure si la mida final de la maqueta seria correcta. Per fer això vaig d'exportar l'arxiu, des d'AutocAD, al format .stl, que és el format que llegeix el programa d'impressió 3D, i amb el programa PrusaSlicer vaig definir els paràmetres d'impressió, exportant-lo a l'extensió .gcode, que és la que llegeix la impressora 3D.



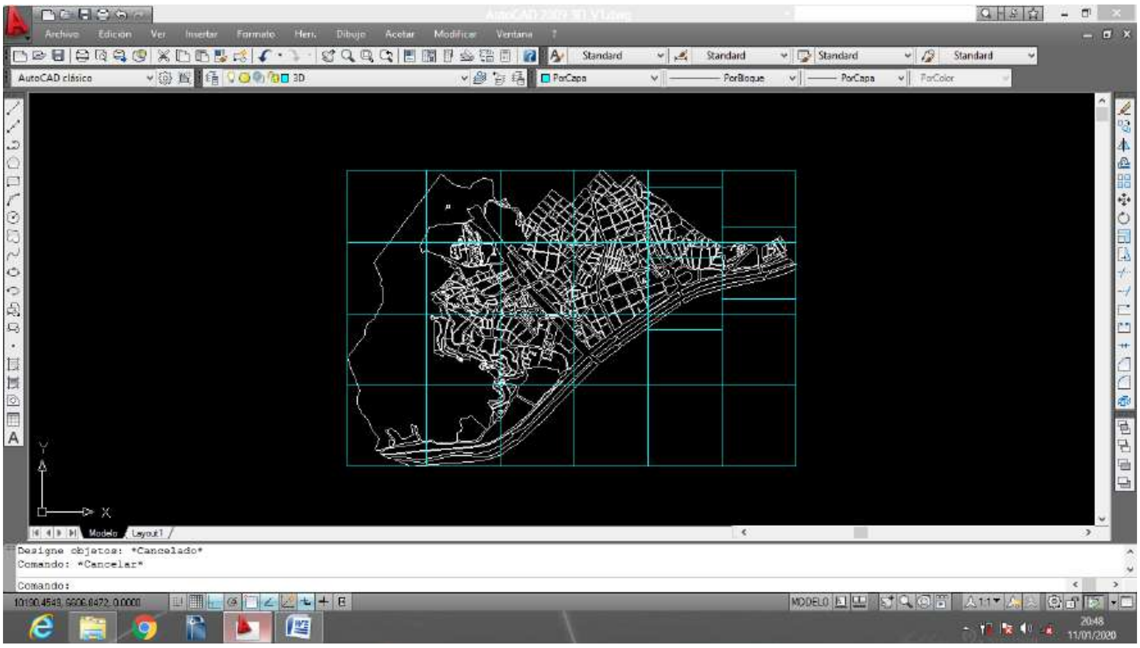
Imatge 135. Laminat de les capes amb el programa PrusaSlicer. *Font pròpia*

El resultat de la impressió es pot apreciar a la imatge següent. Com que era massa petita pel meu propòsit, vaig decidir canviar d'escala i dividir en més parts la ciutat, per tal que els trossos fossin més grans.



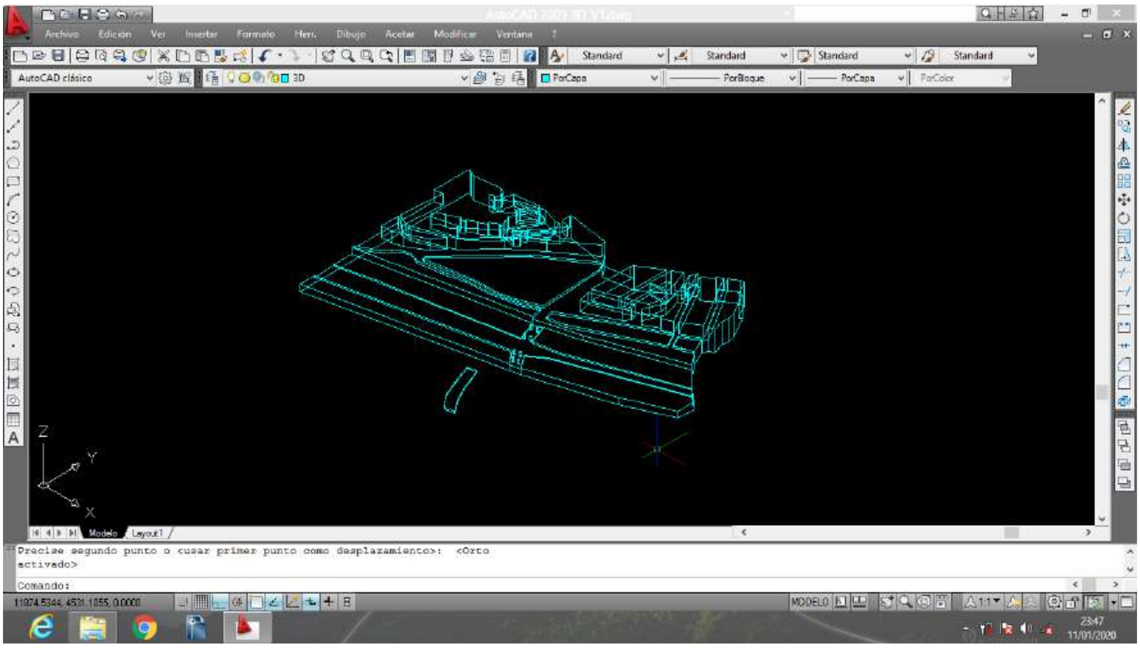
Imatge 136. Resultat de la primera prova d'impressió. *Font pròpia*

La següent prova va consistir a dividir la ciutat en 18 parts en comptes de 6 parts. D'aquesta manera l'escala de la maqueta seria E= 1:3000.



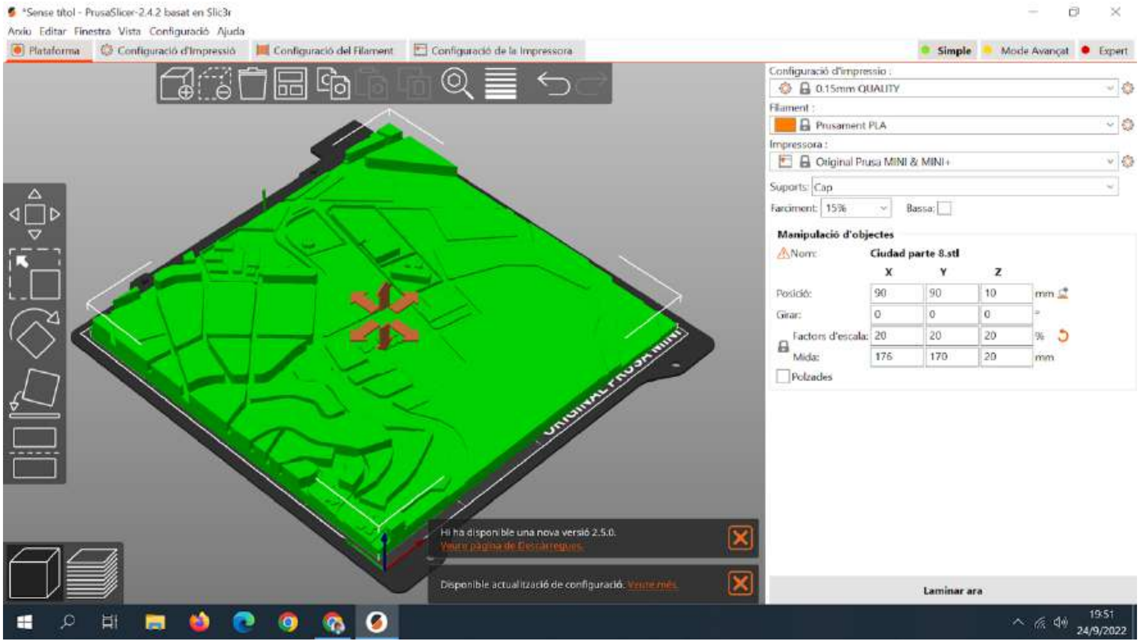
Imatge 137. Divisió de la maqueta en 18 parts. *Font pròpia*

Vaig fer el mateix que abans, transformant les línies en polilínies i donant-li les alçades pertinents. El primer tros de la ciutat és el que es mostra a la figura.

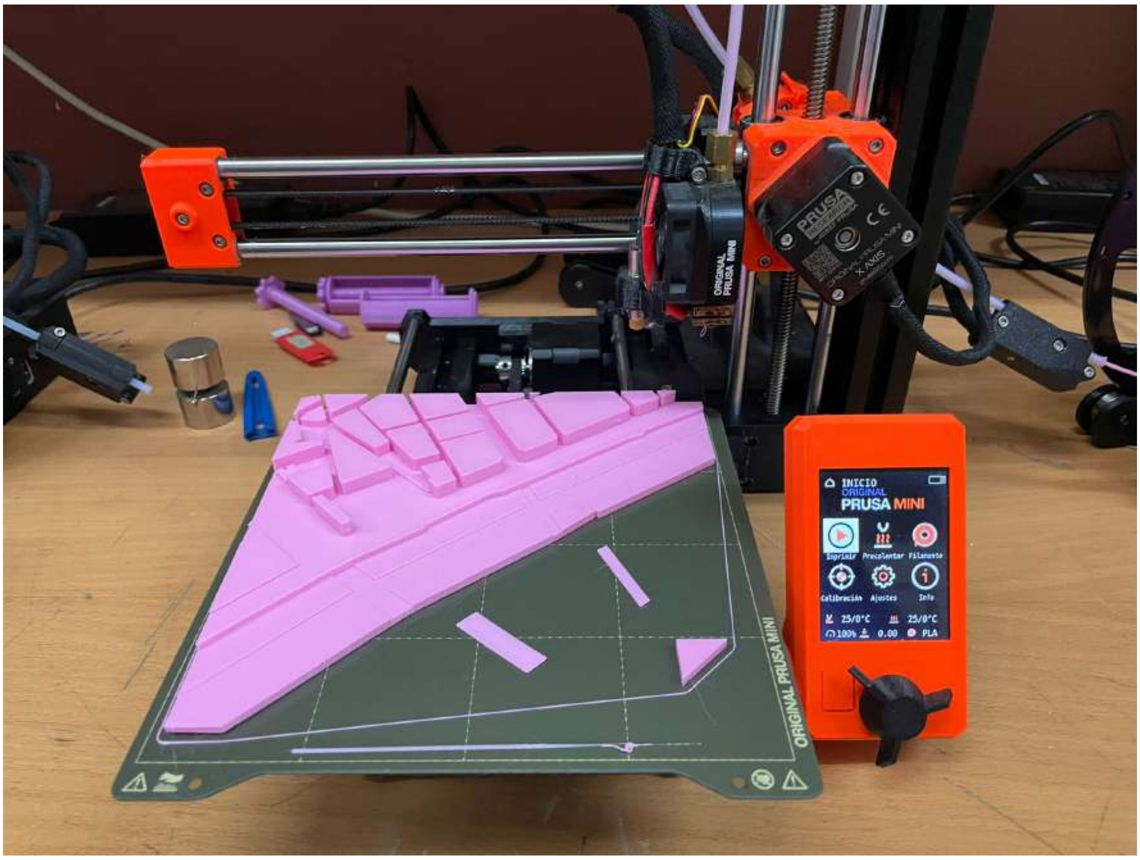


Imatge 138. Primera part de la ciutat amb alçades. *Font pròpia*

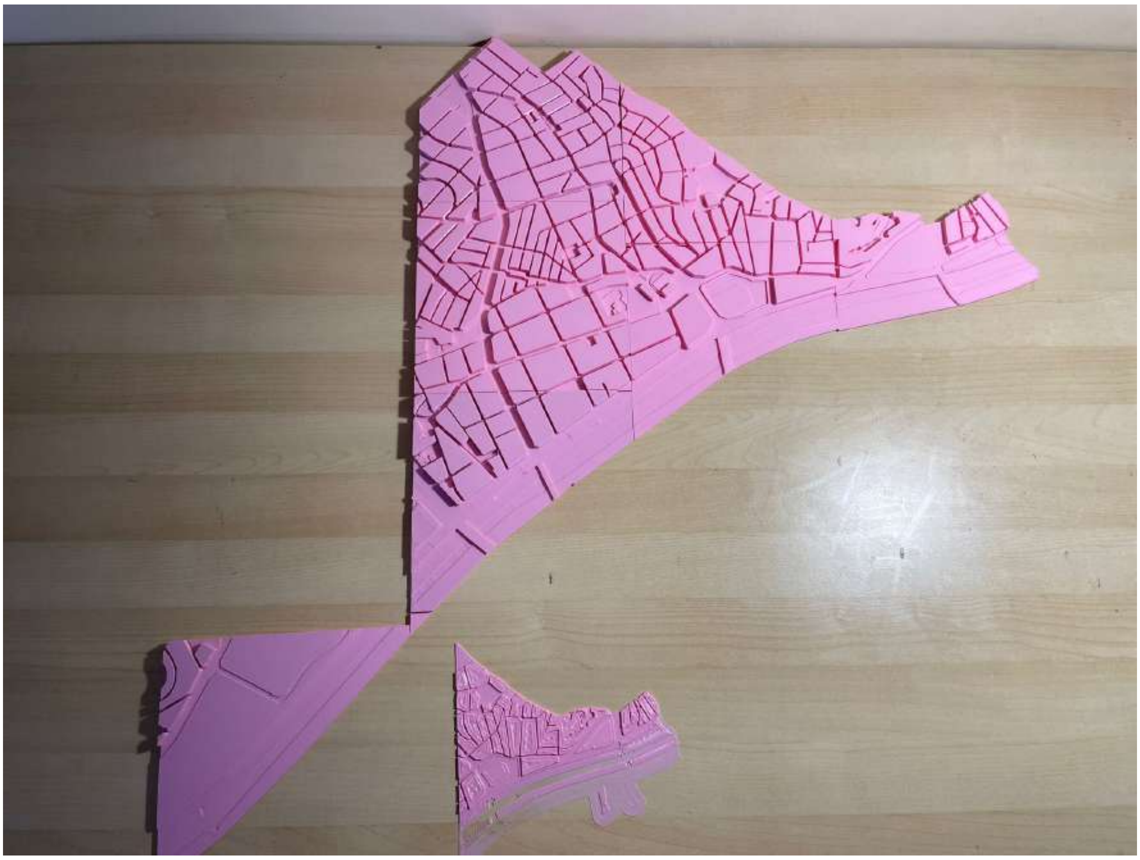
El procediment que vaig seguir a continuació va ser el d'anar exportant des d'AutoCAD a .stl per poder obrir-lo amb el PrusaSlicer, definir els paràmetres d'impressió i exportar-ho a .gcode. De la mateixa manera vaig continuar amb la resta de trossos en que havia dividit la ciutat.



Imatge 139. Escalat d’una de les parts al PrusaSlicer. *Font pròpia*



Imatge 140. Impressió d’una peça a la impressora 3D. *Font pròpia*



Imatge 141. Comparació de la primera peça extreta i de les peces finals de la maqueta. *Font pròpia*

Els temps d'impressió de cadascuna de les parts variava en funció de la forma i de les diferents alçades entre les 5 hores la peça que va trigar menys i les 13 hores la peça que va trigar més. Per simular les muntanyes vaig fer corbes de nivell i vaig donar diferents alçades a aquestes.

Finalment, quan vaig tenir totes les parts impreses, vaig col·locar-les a sobre de la base de tauler laminat que vaig comprar per suportar-les. Vaig marcar la forma, la vaig tallar el contorn amb la serra caladora, i vaig polir els cantells amb la llima i el paper de vidre. Després vaig enganxar amb Sikaflex les peces a la base.

Imatge 142. Maqueta amb totes les peces finalitzada. *Font pròpia*

Imatge 143. Tallat de la base. *Font pròpia*

Imatge 144. Enganxat de les peces a la base. *Font pròpia*

Imatge 145. Maqueta finalitzada. *Font pròpia*

Imatge 146. Foto amb perspectiva del resultat de la maqueta. *Font pròpia*

6.3. Programació amb Arduino

Un cop finalitzada la maqueta vaig realitzat els circuits de les línies d'autobús optimitzades. Volia representar les 12 línies amb LEDs de diferents colors, i realitzar una programació amb Arduino UNO de tal forma que s'anessin encenent les diferents parades, una a una, i finalment que s'encenguessin totes. El màxim de colors de LEDs que vaig trobar al mercat són 10, per això dues línies repeteixen color.

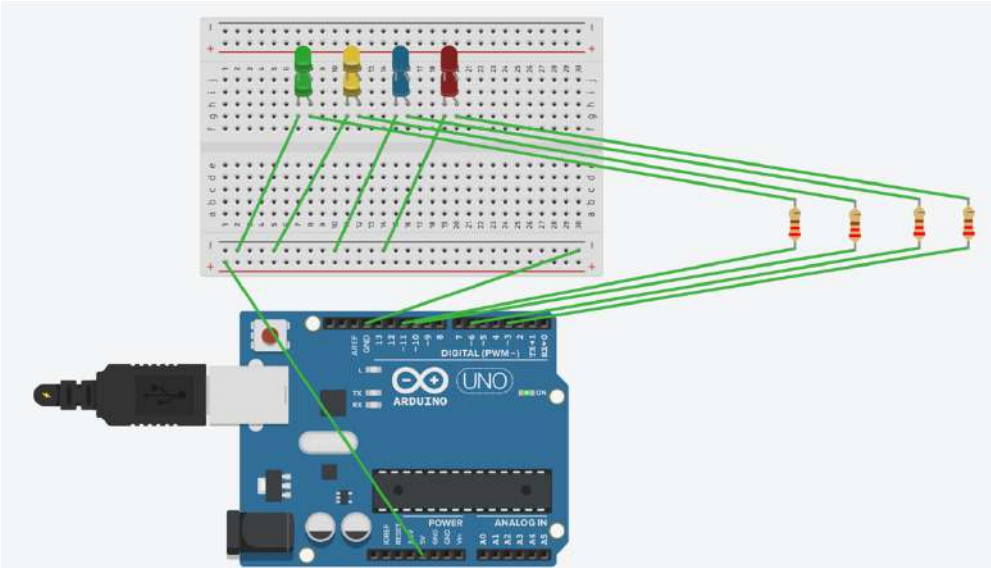
Primer vaig realitzar l'esquema del circuit amb TinkerCAD. Per fer-ho, primer vaig haver de realitzar els càlculs de les resistències que faria falta col·locar. A la imatge es poden observar les característiques dels LEDs de colors. La intensitat de treball

Imatge 147. Característiques dels LEDs de colors. *Font pròpia*

ideal de tots ells, indicada pel fabricant, és del 20 mA, però en funció del seu color, el voltatge que consumeixen és diferent. La placa Arduino treballa amb un voltatge de 5V. Per tant, el primer que vaig fer, va ser calcular el voltatge que s'ha d'absorbir a les resistències, després aplicar la llei d'Ohm per calcular la resistència que havia de posar.

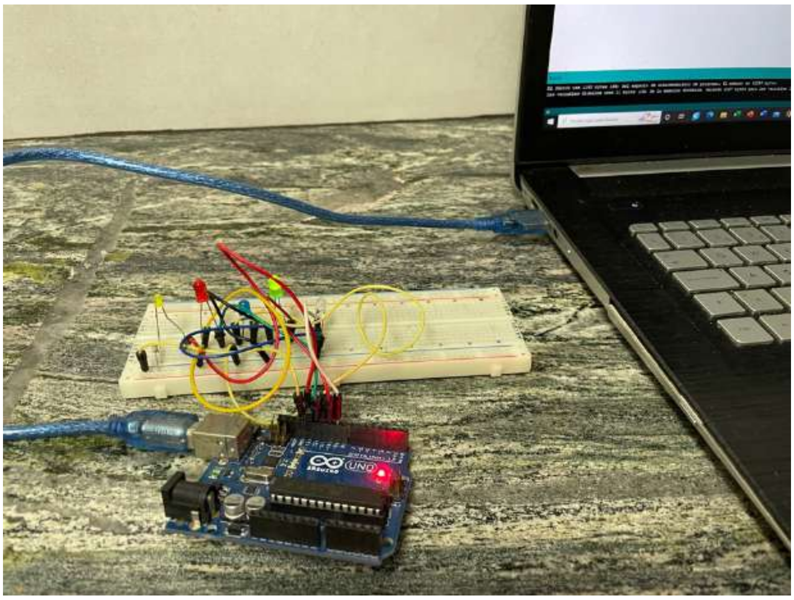
Color del LED	Volts LED	Volts Arduino	Volts resistència	Intensitat de treball del LED	Valor de la resistència
	V_L	V_A	$V_R=V_A-V_L$		R=V/I
Vermell	2V	5V	3V	20 mA	100Ω
Taronja	2V	5V	3V	20 mA	100Ω
Groc	2V	5V	3V	20 mA	100Ω
Verd	3V	5V	2V	20 mA	150Ω
Blau	3V	5V	2V	20 mA	150Ω
Blanc	3V	5V	2V	20 mA	150Ω
Rosa	3V	5V	2V	20 mA	150Ω
Lila	3V	5V	2V	20 mA	150Ω
Verd clar	2V	5V	3V	20 mA	100Ω
Gris	3V	5V	2V	20 mA	150Ω

Un cop vaig saber el valor de la resistència, vaig dibuixar el circuit amb el TinkerCAD i vaig simular el programa, però en comptes de fer-ho amb 12 suposades línies ho vaig fer amb 4, i en comptes de fer-ho amb el nombre de parades de cada línia ho vaig fer amb 2 LEDs per cada línia.



Imatge 148. Esquema del circuit amb TinkerCAD. *Font pròpia*

Un cop acabada la simulació vaig fer un prototip amb una placa protoboard, tot provant la placa Arduino que utilitzaria al circuit amb el programa, però només amb 5 línies en comptes de 12 línies.

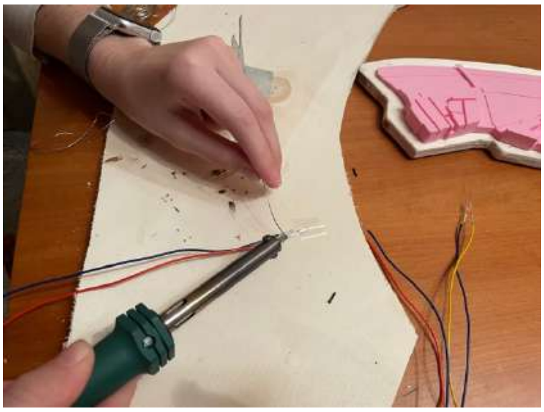


Imatge 149. Simulació del programa amb Arduino i una placa protoboard. *Font pròpia*

Posteriorment vaig retocar el programa per tal que hi haguessin 12 línies en comptes de 5 línies. Per fer-ho, només havia d'afegir més pins d'Arduino. El programa es pot consultar a l'Annex 3.

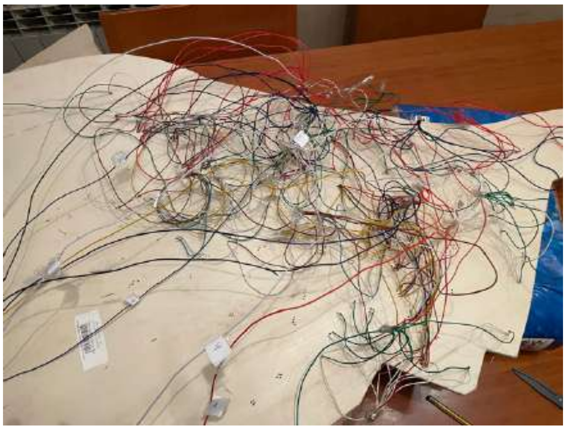
Després vaig haver de foradar la maqueta amb el trepant i una broca d'1 mm al lloc on havia marcat les parades segons el plànols optimitzat (segona proposta, amb alguna línia sense optimitzar). Vaig soldar els LEDs als cables amb el soldador i vaig realitzar un circuit en paral·lel per tal que cada línia estigués en un sol circuit. Finalment vaig soldar la resistència i vaig connectar els cables als diferents pins de la placa Arduino. Mentre anava muntant, havia d'anar provant les línies per veure si totes les soldadures estaven ben realitzades. Finalment, vaig fer la prova final i vaig preparar una base amb llistons a la maqueta, per tal que tots els cables poguessin quedar tapats.

Imatge 150. Procés de construcció de la maqueta: Foradat amb el trepant. *Font pròpia*



Imatge 151. Procés de construcció de la maqueta: soldadura dels LEDs als cables. *Font pròpia*

Imatge 152. Procés de construcció de la maqueta: muntatge dels LEDs. *Font pròpia*



Imatge 153. Procés de construcció de la maqueta: connexions part inferior de la maqueta. *Font pròpia*

Imatge 154. Procés de construcció de la maqueta: programació dels LEDs. *Font pròpia*

Imatge 155. Procés de construcció de la maqueta: programació dels LEDs. *Font pròpia*

Imatge 156. Maqueta finalitzada. *Font pròpia*

Aquest és l'enllaç al vídeo que mostra el resultat de la maqueta:

https://drive.google.com/file/d/1zUpOa9E6jZ7aGtmaqmz1QN9cVY8LMiag/view?usp=share_link

7. CONCLUSIONS

Segons els resultats obtinguts, puc elaborar una sèrie de conclusions que confirmaran o desmentiran les meves hipòtesis inicials.

D'una banda, la meva primera hipòtesi afirmava que era possible realitzar una optimització del nombre de parades d'autobús de Santa Coloma de Gramenet, i aquesta es confirma. En fer l'estudi de la densitat de població i la densitat de parades, vaig veure que no hi havia un equilibri entre aquests valors i, en conseqüència, vaig fer una redistribució de cinc parades. Per tant, sí que era possible fer una optimització en aquest aspecte.

D'altra banda, la segona hipòtesi asseverava que es podia fer una optimització del temps de cada línia mitjançant la teoria de grafs, i també es comprova. Per tal de realitzar aquesta segona optimització, vaig traduir la xarxa d'autobusos (incloent les línies redistribuïdes) a un graf i, a partir d'aquí, vaig seguir el procés d'optimització amb Excel i, més concretament, amb Solver, que estava plantejat per fer amb grafs. Malgrat això, l'eina de Solver va donar error i, per tant, no vaig poder emprar-la per minimitzar el temps de càlcul. Tot i així, vaig poder realitzar les operacions necessàries a mà i, encara que va suposar dedicar-hi més temps, vaig poder fer la optimització. Finalment, cal destacar que, després de fer l'optimització, vaig haver de fer un estudi de la viabilitat dels resultats per poder proposar opcions que optimitzessin el temps del recorregut però que també tinguessin en compte que cal passar per totes les parades.

Respecte als objectius, he pogut conèixer la teoria de grafs (tant la història i els conceptes bàsics com les seves aplicacions i algorismes per optimitzar grafs), conèixer l'actual xarxa d'autobusos de la meva ciutat i aprofundir en el seu funcionament, aplicar la teoria de grafs sobre la xarxa d'autobusos per crear una optimització de les línies (he optimitzat els temps de cada recorregut amb teoria de grafs) i construir una maqueta que representés una de les propostes de millora de la xarxa d'autobusos.

Per dur a terme aquest treball he aprofundit en diferent programari, tal com Excel, AutoCAD i Arduino. Ha estat un repte per a mi aprendre a programar amb el Solver de l'Excel, així com representar la ciutat en tres dimensions en AutoCAD, tot resolent problemes que es van plantejar tals com el fet que el Solver no funcionés donada la gran quantitat de variables amb les quals havia de treballar, així com el fet d'ajustar l'escala de la ciutat per tal que es pogués imprimir amb la impressora 3D del taller de tecnologia. També ha estat un repte la realització de totes les connexions dels LEDs, ja que el fet de representar totes les parades va fer que em plantegés diverses formes de fer-ho per tal de poder dur a terme la programació amb Arduino que volia, fins que vaig trobar la solució idònia de fer diferents línies amb diferents colors a fi de poder veure de forma més clara les diferents parades i poder resumir de forma gràfica el treball.

Per últim, cal destacar que en el meu treball he estudiat possibles optimitzacions en el recorregut d'anada dels autobusos, però aquests resultats plantegen possibles línies d'investigació. En primer lloc, es podria analitzar el recorregut de tornada dels autobusos a Santa Coloma de Gramenet, encara que es pot deduir que el procés que cal aplicar és el mateix que s'ha aplicat en l'anada modificant les variables necessàries. En segon lloc, l'optimització que s'ha fet és només a la meva ciutat, però moltes de les línies que passen per Santa Coloma comencen i acaben en diferents ciutats. Per tant, si es volgués fer una optimització de la línia completa, s'haurien d'estudiar també altres ciutats.

En conclusió, aquest treball no només m'ha servit per proposar opcions de millores d'un aspecte del transport públic de la meva ciutat, sinó que també m'ha demostrat que l'abast de les matemàtiques és immens i que aquesta ciència té una quantitat innombrable d'aplicacions pràctiques.

8. AGRAÏMENTS

La realització d'aquest treball ha estat un procés que ha requerit molt d'esforç, i no hauria estat possible sense l'ajuda i el suport de les persones que esmentaré a continuació.

En primer lloc, vull agrair als meus tutors del treball, Domènec Massiques i Jaime Morcillo, la seva dedicació, esforç i consells., ja que han jugat un paper fonamental en el plantejament i la realització del treball. Agraeixo especialment a en Domènec Massiques el consells i orientacions que m'ha donat, així com tot el seguiment i correccions durant l'estiu i aquest curs. També agraeixo a en Jaime Morcillo la seva ajuda durant els meus primers passos en el treball i la seva orientació inicial.

Agraeixo al Departament de Tecnologia del INS Puig Castellar el fet que m'hagin donat la possibilitat d'imprimir la maqueta amb la seva impressora 3D.

També agreixo als programes Estalmat Catalunya i Bojos per les Matemàtiques que m'hagin donat la inspiració per decidir el tema del meu treball i els materials necessaris per iniciar el meu projecte. Agraeixo especialment a Estalmat Catalunya el fet que em van introduir al món dels grafs i em van presentar el problema dels ponts de Königsberg i agraeixo a Bojos per les Matemàtiques la idea que em van donar per resoldre amb Excel el problema de l'optimització de grafs.

Finalment, m'agradaria agrair a tota la meva família (els meus pares, la meva germana Laia i els meus avis José i Dorita) el seu constant suport i els seus consells durant la realització del meu projecte, així com a tots els amics que han estat al meu constat. Particularment, agraeixo a la meva mare Dori Cañal tot el que ha fet, des de les seves orientacions en la construcció de la maqueta i en el disseny dels plànols amb AutoCAD fins al seu constant suport i la seva ajuda en tots els aspectes, tant en els aspectes tècnics com en els personals. Agraeixo que m'hagi escoltat, aconsellat i ajudat amb tots els dubtes que m'han anat sorgint i quan estava preocupada per la part pràctica. Aquest treball no hauria estat possible sense la seva ajuda.

9. BIBLIOGRAFIA I WEBGRAFIA

Munkres, James R. (2002). *Topologia, segona edició.* Madrid: Pearson, Prentice Hall.

Teoria de grafs [en línia]. Graph everywhere. [Consultat: 18 de juny de 2022]. Disponible a: https://www.grapheverywhere.com/teoria-de-grafos/

Teoria de grafs [en línia]. Universitat de Pamplona. [Consultat: 18 de juny de 2022]. Disponible a: https://www.unipamplona.edu.co/unipamplona/portalIG/home_23/recursos/general/11072012/grafo3.pdf

Teoria de grafs [en línia]. Wikipedia, 14 de juny de 2022. [Consultat: 18 de juny de 2022]. Disponible a: https://es.wikipedia.org/wiki/Teor%C3%ADa_de_grafos

Graf bipartit [en línia]. Accepta el repte. [Consultat: 18 de juny de 2022]. Disponible a: https://www.aceptaelreto.com/problem/statement.php?id=279

Tipus de grafs [en línia]. Matemàtiques discretes. [Consultat: 20 de juny de 2022]. Disponible a: https://sites.google.com/site/matediscretasatilanocarrillo/unidad-3-relaciones-graficos-y-arboles/tipos-de

Camí en teoria de grafs [en línia]. Wikipedia, 1 de maig de 2022. [Consultat: 20 de juny de 2022]. Disponible a: https://es.wikipedia.org/wiki/Camino_(teor%C3%ADa_de_grafos)

Nocions de grafs [en línia]. Teoria de xarxes. [Consultat: 20 de juny de 2022]. Disponible a: http://docencia.udea.edu.co/regionalizacion/teoriaderedes/definicionesu1.html

Grafs no dirigits [en línia]. Wikipedia, 19 de febrer de 2021. [Consultat: 20 de juny de 2022]. Disponible a: https://es.wikipedia.org/wiki/Grafo_no_dirigido

Bianco, Santiago. Anàlisi comparatiu d'algoritmes de grafs [en línia]. ReserarchGate, juny de 2016. [Consultat: 20 de juny de 2022]. Disponible a: https://www.researchgate.net/figure/Ejemplos-de-un-grafo-dirigido-y-un-grafo-no-dirigido_fig7_309278789

Grafs camí [en línia]. Wikipedia, 19 de juny de 2022. [Consultat: 21 de juny de 2022]. Disponible a: https://es.wikipedia.org/wiki/Grafo_camino

Fonaments i aplicacions de la teoria de grafs [en línia]. Publicacions didàctiques, agost 2012. [Consultat: 21 de juny de 2022]. Disponible a: https://mestreacasa.gva.es/c/document_library/get_file?folderId=500018428976&name=DLFE-1363514.pdf

Graf Eulerià [en línia]. Wikipedia, 15 de març de 2022. [Consultat: 21 de juny de 2022]. Disponible a: https://es.wikipedia.org/wiki/Ciclo_euleriano

Álvarez, José Luis. Grafs Eulerians i Hamiltonians [en línia]. Matemàtiques discretes. [Consultat: 21 de juny de 2022]. Disponible a: https://sites.google.com/site/mdisc11211217/unidad-vi---grafos/grafos-eulerianos-y-hamiltonianoss

Mostaccio, Catalina; Pérez, Gabriela. Graf ponderat [en línia]. Grafs. [Consultat: 21 de juny de 2022]. Disponible a: http://163.10.22.82/OAS/estructuras_de_grafos/grafo_ponderado.html

Vèrtex de tall [en línia]. Wikipedia, 20 de juny de 2022 [Consultat: 22 de juny de 2022]. Disponible a: https://es.wikipedia.org/wiki/V%C3%A9rtice_de_corte

Problema del camí més curt [en línia]. Wikipedia. [Consultat: 22 de juny de 2022]. Disponible a: https://es.wikipedia.org/wiki/Problema_del_camino_m%C3%A1s_corto

Aresta de tall [en línia]. Academic, maig de 2022. [Consultat: 22 de juny de 2022]. Disponible a: https://es-academic.com/dic.nsf/eswiki/103896

Ponts de Königsberg [en línia]. Història de la teoria de grafs. [Consultat: 23 de juny de 2022]. Disponible a: https://www.timetoast.com/timelines/historia-de-la-teoria-de-los-grafos

Ponts de Königsberg [en línia]. Ciència i matemàtiques, 3 de març de 2022. [Consultat: 23 de juny de 2022]. Disponible a: https://www.bbvaopenmind.com/ciencia/matematicas/euler-problema-de-los-puentes-de-konigsberg/

Ponts de Königsberg [en línia]. Aprenent matemàtiques. [Consultat: 23 de juny de 2022]. Disponible a: https://aprendiendomatematicas.com/los-puentes-de-konigsberg/

Sorando, José María. Ponts de Königsberg [en línia]. Matemàtiques al teu món. [Consultat: 23 de juny de 2022]. Disponible a: https://matematicasentumundo.es/HISTORIA/historia_puentes.htm

Teorema de Kirchhoff [en línia]. Aprenent wiki. [Consultat: 24 de juny de 2022]. Disponible a: https://hmn.wiki/es/Kirchhoff%27s_matrix_tree_theorem

Arbre d'expansió [en línia]. Aprenent wiki. [Consultat: 24 de juny de 2022]. Disponible a: https://hmn.wiki/es/Spanning_tree_(mathematics)

Arbre d'expansió [en línia]. Google, arts and culture. [Consultat: 24 de juny de 2022]. Disponible a: https://artsandculture.google.com/entity/m02bn16?hl=es

Algoritmes i estructures de dades[en línia]. Tasques de grafs, 2 d'octubre de 2021. [Consultat: 24 de juny de 2022]. Disponible a: https://users.dcc.uchile.cl/~raparede/clases/cc30a/00.2/tarea3/tarea3.html

Del Castillo, Blanca Nayeli. Problema dels quatre colors [en línia]. Ciència i cultura, desembre de 2016. [Consultat: 24 de juny de 2022]. Disponible a: https://www.revistac2.com/el-problema-de-los-cuatro-colores/

Morales, Miguel Ángel. Teorema dels quatre colors [en línia]. Gaussianos, 25 d'abril de 2013. [Consultat: 24 de juny de 2022]. Disponible a: https://www.gaussianos.com/el-teorema-de-los-cuatro-colores-la-teoria-de-grafos-al-servicio-del-coloreado-de-mapas/

Teoria de grafs i química [en línia]. Matemotion, 6 d'agost de 2014. [Consultat: 25 de juny de 2022]. Disponible a: https://culturacientifica.com/2014/08/06/arthur-cayley-la-teoria-de-grafos-y-los-isomeros-quimicos/

Isòmers[en línia]. Institut Nacional del Càncer. [Consultat: 25 de juny de 2022]. Disponible a: https://www.cancer.gov/espanol/publicaciones/diccionarios/diccionario-cancer/def/isomero

Alcans [en línia]. Alonso formula 12 de maig de 2021. [Consultat: 27 de juny de 2022]. Disponible a: https://www.alonsoformula.com/organica/alcanos.htm

Alquins [en línia]. Programer click. [Consultat: 27 de juny de 2022]. Disponible a: https://programmerclick.com/article/3249852395/

El grup alquil [en línia]. Xarxa espanyola de la química sostenible, 10 d'octubre de 2011. [Consultat: 27 de juny de 2022]. Disponible a: https://quimicasostenible.wordpress.com/2011/10/10/el-n-hexano-%C2%BFheroe-o-villano/

Joc Icosian [en línia]. Wikipedia, 12 d'agost de 2020. [Consultat: 28 de juny de 2022]. Disponible a: https://es.wikipedia.org/wiki/Juego_Icosian

Joc Icosian [en línia]. Associació cultural juguem tots, gener de 2022. [Consultat: 28 de juny de 2022]. Disponible a: https://www.jugamostodos.org/index.php/noticias-en-espana/en-los-medios/11096-juego-icosiano

Poliedres i diagonals [en línia]. Geogebra. [Consultat: 11 de juliol de 2022]. Disponible a: https://www.geogebra.org/m/fNBM5xkZ

Arreola, Juan José. Teoria de grafs [en línia]. Wordpress, 21 de setembre de 2015. [Consultat: 11 de juliol de 2022]. Disponible a: https://ztfnews.wordpress.com/2014/09/21/denes-konig-y-la-teoria-de-grafos/

Teorema de Köning [en línia]. Wikipedia, 14 de setembre de 2020. [Consultat: 12 de juliol de 2022]. Disponible a: https://es.wikipedia.org/wiki/Teorema_de_K%C3%B6nig_(teor%C3%ADa_de_grafos)

Graf bipartit [en línia]. Academic, gener 2022. [Consultat: 12 de juliol de 2022]. Disponible a: https://es-academic.com/dic.nsf/eswiki/539559

Teoria de grafs [en línia]. Wikipedia, 14 de juny de 2022. [Consultat: 12 de juliol de 2022]. Disponible a: https://es.wikipedia.org/wiki/Apareamiento_(teor%C3%ADa_de_grafos)

Conjunts [en línia]. Academic, gener 2022. [Consultat: 12 de juliol de 2022]. Disponible a: https://es-academic.com/dic.nsf/eswiki/294585

Cobertura de vèrtex [en línia]. Wikipedia, 3 de juliol de 2022. [Consultat: 12 de juliol de 2022]. Disponible a: https://es.wikipedia.org/wiki/Cobertura_de_v%C3%A9rtices

Teorema de Köning [en línia]. Wiki. [Consultat: 12 de juliol de 2022]. Disponible a: https://hmong.es/wiki/K%C5%91nig%27s_theorem_(graph_theory)

Anàlisi de xarxes [en línia]. Sutori. [Consultat: 14 de juliol de 2022]. Disponible a: https://www.sutori.com/es/historia/analisis-de-redes-sociales--sh1k1AabkNDP2R8hELy92D2E

Mapa d'Europa [en línia]. Google Maps. [Consultat: 14 de juliol de 2022]. Disponible a: https://www.google.es/maps/dir/Barcelona/Par%C3%ADs,+Francia/@45.4664244,0.0033931,6z/data=!4m14!4m13!1m5!1m1!1s0x12a49816718e30e5:0x44b0fb3d4f47660a!2m2!1d2.168568!2d41.3873974!1m5!1m1!1s0x47e66e1f06e2b70f:0x40b82c3688c9460!2m2!1d2.3522219!2d48.856614!3e0?hl=es

Algoritme del camí més curt [en línia]. Urbanisme i transport, 28 de març de 2016. [Consultat: 15 de juliol de 2022]. Disponible a: http://urbanismoytransporte.com/tag/algoritmo-de-camino-mas-corto/

Algoritme del camí més curt [en línia]. Aprèn programació, 23 de setembre de 2019. [Consultat: 15 de juliol de 2022]. Disponible a: https://aprende.olimpiada-informatica.org/algoritmia-dijkstra-bellman-ford-floyd-warshall

Hassan, Yusef. Algoritme del camí més curt [en línia]. Blog de Hassan, Yusef, 17 de setembre de 2013. [Consultat: 15 de juliol de 2022]. Disponible a: https://yusef.es/blog/2013/09/optimizacion-del-algoritmo-del-camino-mas-corto-entre-todos-los-nodos-de-un-grafo-no-dirigido/

Algoritme de la recerca Heurística [en línia]. EcuRed [Consultat: 16 de juliol de 2022]. Disponible a: https://www.ecured.cu/Algoritmo_de_B%C3%BAsqueda_Heur%C3%ADstica_A*#B.C3.BAsqueda_Heur.C3.ADstica

Algoritme del camí més curt de Dijkstra [en línia]. IO tutorials, Youtube, 2012 [Consultat: 16 de juliol de 2022]. Disponible a: https://www.youtube.com/watch?v=LLx0QVMZVkk

Meneses, Ricardo; Henández, Yulina.Teoria de grafs [en línia]. Apren i programa UNED, 4 de juliol de 2016 [Consultat: 18 de juliol de 2022]. Disponible a: https://aprendeyprogramablog.wordpress.com/2016/07/04/grafos-parte-1/

Algoritme de la recerca Heurística [en línia]. Estructura de dades [Consultat: 18 de juliol de 2022]. Disponible a: http://estructuradedatos2uninca.blogspot.com/p/grafos-particulares.html

Tipus de grafs [en línia]. Wordpress [Consultat: 18 de juliol de 2022]. Disponible a: https://dataestructureii.files.wordpress.com/2015/11/grafos-particulares.pdf

Epstein, David. Wheel graphs [en línia]. Wikipedia, 3 d'octubre de 2006 [Consultat: 18 de juliol de 2022]. Disponible a: https://es.m.wikipedia.org/wiki/Archivo:Wheel_graphs.svg

Matemàtiques discretes [en línia]. Ciències computacionals, INAOE [Consultat: 18 de juliol de 2022]. Disponible a: https://posgrados.inaoep.mx/archivos/PosCsComputacionales/Curso_Propedeutico/Matematicas_Discretas/Capitulo_4_Grafos.pdf

González, Alfonso. Matrius i grafs [en línia]. Departament de matemàtiques de l'IES Fernando de Mena [Consultat: 19 de juliol de 2022]. Disponible a: https://www.matematicasonline.es/BachilleratoCCNN/Segundo/apuntes/matrices-grafos.pdf

Matrius i grafs [en línia]. Càlcul, gener del 2012 [Consultat: 21 de juliol de 2022]. Disponible a: https://calculo.cc/temas/temas_algebra/matriz/teoria/matriz_grafo.html

Camí més curt amb el solver [en línia]. Youbube, 2019 [Consultat: 21 de juliol de 2022]. Disponible a: https://www.youtube.com/watch?v=LYeMWlTfOgA

Camí més curt amb el solver [en línia]. Youbube, 2020 [Consultat: 21 de juliol de 2022]. Disponible a: https://www.youtube.com/watch?v=62-m5QFNEWU

Autobusos a Santa Coloma de Gramenet [en línia]. Ajuntament de Santa Coloma de Gramenet, juliol 2022 [Consultat: 26 de juliol de 2022]. Disponible a: https://www.santacoloma.info/informacion-practica-de-santa-coloma-de-gramenet/autobuses-en-santa-coloma-de-gramenet/

Autobusos a Santa Coloma de Gramenet [en línia]. Moovit, juliol 2022 [Consultat: 26 de juliol de 2022]. Disponible a: https://moovitapp.com/index/es/transporte_p%C3%BAblico-line-B14-Barcelona-362-10717-178076-0

Autobusos a Santa Coloma de Gramenet [en línia]. Moovit, juliol 2022 [Consultat: 26 de juliol de 2022]. Disponible a: https://moovitapp.com/index/es/transporte_p%C3%BAblico-line-B14-Barcelona-362-10717-178076-0

Autobusos a Santa Coloma de Gramenet [en línia]. Moovit, juliol 2022 [Consultat: 26 de juliol de 2022]. Disponible a: https://moovitapp.com/index/es/transporte_p%C3%BAblico-line-B15-Barcelona-362-10717-178077-0

Autobusos a Santa Coloma de Gramenet [en línia]. Moovit, juliol 2022 [Consultat: 26 de juliol de 2022]. Disponible a: https://moovitapp.com/barcelona-362/lines/b18/178079/3711826/es?ref=2&customerId=4908

Autobusos a Santa Coloma de Gramenet [en línia]. Moovit, juliol 2022 [Consultat: 26 de juliol de 2022]. Disponible a: https://moovitapp.com/index/es/transporte_público-line-B20-Barcelona-362-10717-178081-0

Autobusos a Santa Coloma de Gramenet [en línia]. Moovit, juliol 2022 [Consultat: 27 de juliol de 2022]. Disponible a: https://moovitapp.com/index/es/transporte_p%C3%BAblico-line-M27-Barcelona-362-10717-719391-0

Autobusos a Santa Coloma de Gramenet [en línia]. Moovit, juliol 2022 [Consultat: 27 de juliol de 2022]. Disponible a: https://moovitapp.com/index/es/transporte_p%C3%BAblico-line-M30-Barcelona-362-10717-3456524-0

Autobusos a Santa Coloma de Gramenet [en línia]. Moovit, juliol 2022 [Consultat: 27 de juliol de 2022]. Disponible a: https://moovitapp.com/index/es/transporte_p%C3%BAblico-line-B80-Barcelona-362-10717-178093-0

Autobusos a Santa Coloma de Gramenet [en línia]. Moovit, juliol 2022 [Consultat: 27 de juliol de 2022]. Disponible a: https://moovitapp.com/index/es/transporte_p%C3%BAblico-line-B81-Barcelona-362-10717-178094-0

Autobusos a Santa Coloma de Gramenet [en línia]. Moovit, juliol 2022 [Consultat: 28 de juliol de 2022]. Disponible a: https://moovitapp.com/index/es/transporte_p%C3%BAblico-line-B84-Barcelona-362-10717-178095-0

Autobusos a Santa Coloma de Gramenet [en línia]. Moovit, juliol 2022 [Consultat: 28 de juliol de 2022]. Disponible a: https://moovitapp.com/index/es/transporte_p%C3%BAblico-line-M28-Barcelona-362-10717-719392-0

Autobusos a Santa Coloma de Gramenet [en línia]. Moovit, juliol 2022 [Consultat: 28 de juliol de 2022]. Disponible a: https://moovitapp.com/index/es/transporte_p%C3%BAblico-line-M19-Barcelona-362-10717-3456520-0

Autobusos a Santa Coloma de Gramenet [en línia]. Moovit, juliol 2022 [Consultat: 28 de juliol de 2022]. Disponible a: https://www.tmb.cat/es/barcelona/autobuses/-/lineabus/V33

Autobusos a Santa Coloma de Gramenet [en línia]. Moovit, juliol 2022 [Consultat: 28 de juliol de 2022]. Disponible a: https://moovitapp.com/index/es/transporte_p%C3%BAblico-line-V33-Barcelona-362-10708-747931-0

Autobusos a Santa Coloma de Gramenet [en línia]. Moovit, juliol 2022 [Consultat: 28 de juliol de 2022]. Disponible a: https://www.tmb.cat/ca/barcelona/autobusos/-/lineabus/V33

Autobusos a Santa Coloma de Gramenet [en línia]. Ajuntament de Santa Coloma de Gramenet, juliol 2022 [Consultat: 30 de juliol de 2022]. Disponible a: https://www.santacoloma.info/informacion-practica-de-santa-coloma-de-gramenet/barrios/

Barris i habitants de Santa Coloma de Gramenet [en línia]. Foro Ciudad, 10 de juliol 2022 [Consultat: 30 de juliol de 2022]. Disponible a: https://www.foro-ciudad.com/barcelona/santa-coloma-de-gramenet/habitantes.html

Densitat de població Santa Coloma de Gramenet [en línia]. Pla local per a la inclusió social, Ajuntament de santa Coloma de Gramenet [Consultat: 9 d'agost de 2022]. Disponible a: https://www.gramenet.cat/es/archivo-temporal/archivo-basura/plan-local-por-la-inclusion-social-plis/sistema-de-informacion-social/datos-basicos-de-la-ciudad/poblacion/#c84151

Orografia [en línia]. Significados [Consultat: 9 d'agost de 2022]. Disponible a: https://www.significados.com/orografia/

Missatges d'error de Solver [en línia]. Microsoft [Consultat: 5 de setembre de 2022]. Disponible a: https://luckytemplates.com/es/microsoft-office/%C2%BFque-significan-los-mensajes-de-error-de-solver-en-excel/55568821

10. ANNEXOS

10.1. Annex 1: línies d'autobusos de Santa Coloma de Gramenet

Per tal de dur a terme la part pràctica d'aquest treball, una investigació sobre la xarxa d'autobusos i totes les línies que passen per Santa Coloma de Gramenet. Només es tenen en compte les línies que transiten la ciutat, no aquelles que només hi tenen alguna parada i la comuniquen amb altres ciutats, com la B2, B5 o M1. Les línies que hi ha a continuació són de l'empresa Tusgsal.

1. B2: BADALONA (CANYADÓ) → SANTA COLOMA (ESPERIT SANT)
   No es té en compte, ja que totes les parades són a Badalona exceptuant la d'Esperit Sant, i l'objectiu d'aquest treball és millorar la xarxa d'autobusos dins de la ciutat.
2. B14: SANTA COLOMA (CAN FRANQUESA) → SANT ADRIÀ DEL BESÒS (ESTACIÓ DE RODALIES – TRAM)
   La línia B14 opera tots els dies, i el seu horari es pot veure a la taula posterior.

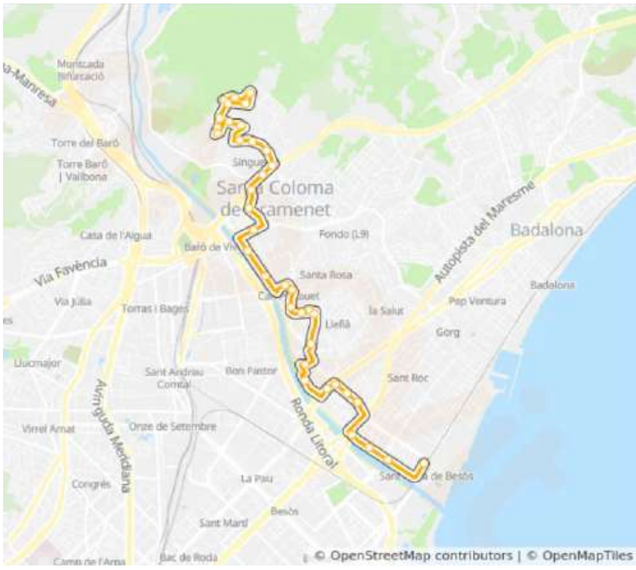
Dia	Hores operatives
Dilluns	7:00 – 22:00
Dimarts	7:00 – 22:00
Dimecres	7:00 – 22:00
Dijous	7:00 – 22:00
Divendres	7:00 – 22:00
Dissabte	8:00 – 21:00
Diumenge	8:00 – 21:00

En la taula de sota hi ha un llistat de les parades per les quals passa aquesta línia tant a l'anada com a la tornada. Pel que fa a l'optimització, només es tindran en compte les parades d'anada que passen per Santa Coloma de Gramenet.

	Anada	Tornada
Passen per Santa Coloma de Gramenet	1. Can Franquesa – Centre Cívic (punt de sortida) 2. Menorca 39 (1 min) 3. Parc Serralada de Marina (1 min) 4. Còrdova – Menorca (1 min) 5. Parc Sandino (1 min) 6. Còrdova 49 (1 min) 7. Còrdova 57 (30 seg) 8. Mallorca – Còrdova (30 seg) 9. Milton (1 min) 10. Comissaria Mossos d'Esquadra (30 seg) 11. Cap Singuerlín (1 min) 12. Metro Singuerlín (1 min) 13. Santiago Rusiñol – Aragó (30 seg) 14. Pallaresa – Balears (1 min) 15. Cúbics (30 seg) 16. Av. Francesc Macià – Av. Pallaresa (1 min) 17. Av. Francesc Macià – Mare de Déu dels Àngels (1 min) 18. Pg. Llorenç Serra – Av. Francesc Macià (2 min) 19. Pg. Salzereda – Francesc Moragas (2 min)	1. Hospital Esperit Sant 2. Escola Pere de Tera 3. Cap Santa Rosa 4. Raval 5. Metro Can Peixauet 6. Par Can Peixauet 7. Pg. Salzereda 8. Pg. Salzereda – Jutjats 9. Escola Torre Balldovina 10. Av. Francesc Macià – Av. Pallaresa 11. Escola Jaume Salvatella 12. Institut Les Vinyes 13. Mercat Singuerlín 14. Metro Singuerlín 15. Col·legi Singuerlín 16. Cap Singuerlín 17. Anselm de Riu – Montseny 18. Milton 19. Av. Anselm de Riu – Eiximenis 20. Còrdova – Menorca 21. Can Franquesa 22. Cabrera 23 23. Can Franquesa – Centre Cívic

	20. Pg. Salzereda – Cultura (2 min) 21. Metro Can Peixauet (2 min) 22. Biblioteca Can Peixauet (1 min) 23. Av. Generalitat – Sant Jordi (2 min) 24. Pau Clarís (30 seg) 25. Cap Santa Rosa (1 min) 26. Escola Pere de Tera (1 min) 27. Hospital Esperit Sant (1 min) 28. Els Safaretjos (2 min)	

A la imatge posterior podem veure el recorregut d'aquesta línia.



Imatge 157. Recorregut de la línia B14. *Imatge extreta de https://moovitapp.com/index/es/transporte_p%C3%BAblico-line-B14-Barcelona-362-10717-178076-0*

3. B15: SANTA COLOMA (OLIVERES) → BADALONA (C. C. MONTIGALÀ)

La línia B15 opera els dies hàbils. Podem veure el seu horari a la taula de sota.

Dia	Hores operatives
Dilluns	7:00 – 21:00
Dimarts	7:00 – 21:00
Dimecres	7:00 – 21:00
Dijous	7:00 – 21:00
Divendres	7:00 – 21:00
Dissabte	6:55 – 21:15
Diumenge	Sense servei

La taula de sota mostra el llistat de les parades d'anada i tornada.

	Anada	Tornada
Passen per Santa Coloma de Gramenet	1. Poliesportiu Nou Oliveres (punt de sortida) 2. Parc Can Zam (1 min) 3. Metro Can Zam (30 seg) 4. Parc Moragues (1 min) 5. Institut Les Vinyes (1 min) 6. Mercat Singuerlín (1 min) 7. Pallaresa – Francesc Macià (2 min) 8. Camp Antonio Amorós (1 min) 9. Pg. Salzereda – Barri Riu Nord (2 min) 10. Pg. Salzereda – Jutjats (1 min) 11. Pg. Llorenç Serra – Sant Joaquim (1 min)	1. Raval – Santa Rosa 2. Av. Generalitat – Av. dels Banús 3. Av. Generalitat – Dr. Torras i Bages 4. Av. Generalitat – Sant Benet 5. Pl. Vila – Metro Santa Coloma 6. Pg. Llorenç Serra – Av. Francesc Macià 7. Pg. Salzereda – Jutjats 8. Escola Torre Balldovina 9. Av. Francesc Macià – Av. Pallaresa

	12. Av. Sta. Coloma – Pg. Llorenç Serra (1 min) 13. Av. Sta. Coloma – Francesc Moragas (1 min) 14. Av. Sta. Coloma – Mossèn Jacint Verdaguer (2 min) 15. Biblioteca Can Peixauet (1 min) 16. Raval – Centre Cívic (2 min) 17. Raval – Pavelló (1 min) 18. Escola Tanit (1 min) 19. Institut Terra Roja (1 min)	10. Escola Jaume Salvatella 11. Institut Les Vinyes 12. Mercat Singuerlín 13. Institut Les Vinyes 14. Amèrica – Aguileres 15. Anselm de Riu – Font de l'Alzina 16. Metro Can Zam 17. Parc Can Zam 18. Juli Garreta 19. Pep Ventura – Juli Garreta 20. Pep Ventura – Escales 21. Poliesportiu Nou Oliveres

A la imatge posterior podem veure el recorregut d'aquesta línia.

Imatge 158. Recorregut de la línia B15. *Imatge extreta de https://moovitapp.com/index/es/transporte_p%C3%BAblico-line-B15-Barcelona-362-10717-178077-0*

4. B18: SANTA COLOMA (CAN PEIXAUET) → MONTCADA I REIXAC (PL. LLUÍS COMPANYS)

   L'horari d'aquesta línia és el següent.

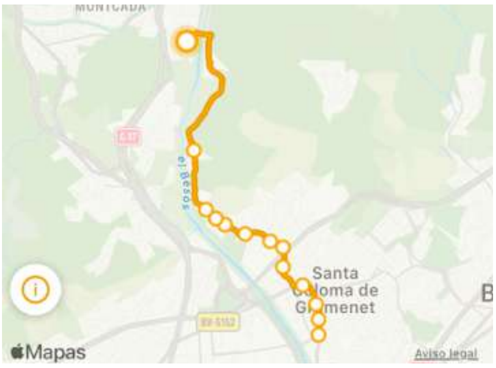
Dia	Hores operatives
Dilluns	7:01 – 21:31
Dimarts	7:01 – 21:31
Dimecres	7:01 – 21:31
Dijous	7:01 – 21:31
Divendres	7:01 – 21:31
Dissabte	7:01 – 21:31
Diumenge	Sense servei

Les seves parades són les següents.

	Anada	Tornada
Passen per Santa Coloma de Gramenet	1. Polígon Bosc Llarg (punt de sortida) 2. Tanatori (2 min) 3. Parc Can Zam (2 min) 4. Metro Can Zam (30 seg) 5. Parc Moragues (1 min) 6. Av. Francesc Macià – Av. Pallaresa (1 min) 7. Av. Francesc Macià – Mare de Déu dels Àngels (1 min) 8. Av. Sta. Coloma – Pg. Llorenç Serra (2 min) 9. Av. Sta. Coloma – Francesc Moragas (1 min)	1. Av. Generalitat – Av. dels Banús 2. Av. Generalitat – Dr. Torras i Bages 3. Av. Generalitat – Sant Benet 4. Pl. Vila – Metro Santa Coloma 5. Av. Francesc Macià – Safareig 6. Av. Francesc Macià – Av. Pallaresa 7. Escola Jaume Salvatella 8. Metro Can Zam 9. Parc Can Zam

	10. Av. Sta. Coloma – Mossèn Jacint Verdaguer (2 min)	10. Ptge. Juli Garreta 11. Tanatori 12. Polígon Bosc Llarg

A la imatge posterior podem veure el recorregut d'aquesta línia.



Imatge 159. Recorregut de la línia B18. *Imatge extreta de https://moovitapp.com/barcelona-362/lines/b18/178079/3711826/es?ref=2&customerId=4908*

5. B20: SANTA COLOMA (OLIVERES) → BARCELONA (RONDA SANT PERE)

La ruta de la línia B20 opera tots els dies. L'horari d'aquesta línia és el següent.

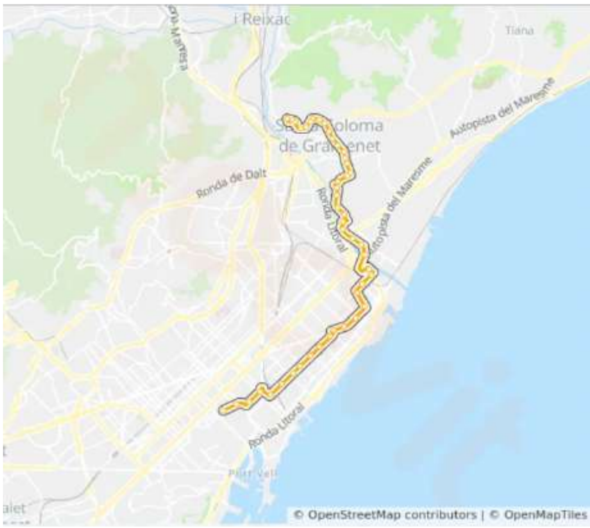
Dia	Hores operatives
Dilluns	4:50 – 22:10
Dimarts	4:50 – 22:10
Dimecres	4:50 – 22:10
Dijous	4:50 – 22:10
Divendres	4:50 – 22:10
Dissabte	5:30 – 22:10
Diumenge	5:30 – 22:10

Les seves parades són les següents.

	Anada	Tornada
Passen per Santa Coloma de Gramenet	1. Les Oliveres (punt de sortida) 2. Centre Che Guevara (30 seg) 3. Esportiu Les Oliveres (30 seg) 4. Font de l'Alzina – Menéndez Pelayo (1 min) 5. Font de l'Alzina – Anselm de Riu (30 seg) 6. Anselm de Riu – Singuerlín (1 min) 7. Cap Singuerlín (30 seg) 8. Metro Singuerlín (1 min) 9. Santiago Rusiñol – Aragó (30 seg) 10. Balears – Pallaresa (1 min) 11. Mossèn Camil Rosell – Nord (1 min) 12. Metro Església Major (1 min) 13. Mossèn Camil Rosell – Irlanda (1 min) 14. Escola Serra de Marina (1 min) 15. Comissaria Policia Nacional (1 min) 16. Irlanda – Santa Rosa (2 min)	1. Ctra. de Sta. Coloma - Madrid 2. Hospital Esperit Sant – Pont del Molinet 3. Parc del Molinet 4. Raval 5. Av. Generalitat – Av. dels Banús 6. Av. dels Banús – Camprodon 7. Irlanda – Mossèn Jacint Verdaguer 8. Comissaria Policia Nacional 9. Escola Serra de Marina 10. Pl. Església 11. Metro Església Major 12. Cementiri Vell 13. Balears – Pallaresa 14. Santiago Rusiñol – Aragó 15. Col·legi Singuerlín 16. Cap Singuerlín 17. Anselm de Riu – Singuerlín 18. Anselm de Riu – Font de l'Alzina 19. Font de l'Alzina – Menéndez Pelayo

	17. Banús – Metro Santa Rosa (1 min) 18. Can Peixauet (1 min) 19. Biblioteca Can Peixauet (1 min) 20. Av. Generalitat – Sant Jordi (2 min) 21. Parc del Molinet (1 min) 22. Hospital Esperit Sant – Pont del Molinet (1 min) 23. Els Safaretjos (30 seg)	20. Esportiu Les Oliveres 21. Centre Che Guevara 22. Les Oliveres

A la imatge posterior podem veure el recorregut d'aquesta línia.



Imatge 160. Recorregut de la línia B20. *Imatge extreta de https://moovitapp.com/index/es/transporte_p%C3%BAblico-line-B20-Barcelona-362-10717-178081-0*

6. M27: SANTA COLOMA (LES OLIVERES) → BADALONA (CENTRE)

Aquesta línia opera tots els dies. El seu horari és el següent.

Dia	Hores operatives
Dilluns	4:40 – 22:27
Dimarts	4:40 – 22:27

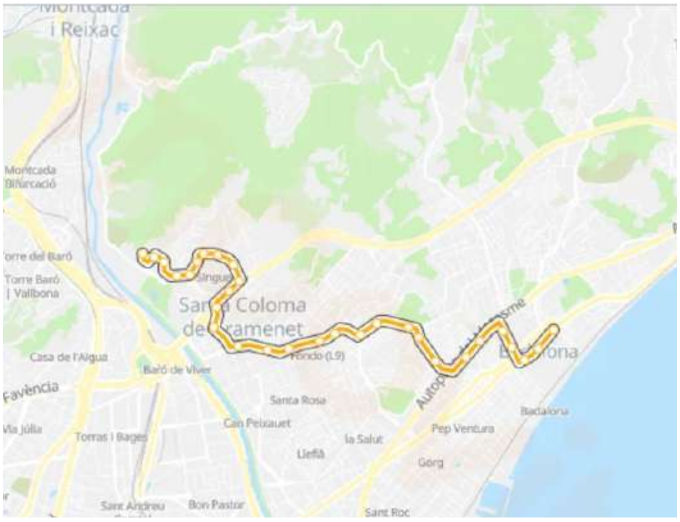
Dimecres	4:40 – 22:27
Dijous	4:40 – 22:27
Divendres	4:40 – 22:27
Dissabte	5:20 – 22:20
Diumenge	7:02 – 22:22

Les seves parades són les següents.

	Anada	Tornada
Passen per Santa Coloma de Gramenet	1. Les Oliveres (punt de sortida) 2. Centre Che Guevara (30 seg) 3. Esportiu Les Oliveres (30 seg) 4. Font de l'Alzina – Menéndez Pelayo (1 min) 5. Font de l'Alzina – Anselm de Riu (30 seg) 6. Anselm de Riu – Singuerlín (1 min) 7. Cap Singuerlín (30 seg) 8. Metro Singuerlín (1 min) 9. Santiago Rusiñol – Aragó (30 seg) 10. Pallaresa – Balears (1 min) 11. Cúbics (30 seg) 12. Av. Francesc Macià – Av. Pallaresa (1 min)	1. Av. Mònaco 2. Sicília – Florència 3. Sicília – Verdi 4. Rbla. Sant Sebastià – Dr. Pagès 5. Rbla. Sant Sebastià – Irlanda 6. Pl. Vila – Metro Santa Coloma 7. Av. Francesc Macià – Safareig 8. Pallaresa – Parc Europa 9. Balears – Pallaresa 10. Santiago Rusiñol – Aragó 11. Col·legi Singuerlín 12. Cap Singuerlín 13. Anselm de Riu – Singuerlín 14. Anselm de Riu – Font de l'Alzina

	13. Av. Francesc Macià – Mare de Déu dels Àngels (1 min) 14. Pl. Vila – Metro Santa Coloma (1 min) 15. Mercat Sagarra (1 min) 16. Rbla. Sant Sebastià – Irlanda (2 min) 17. Metro Fondo (2 min) 18. Verdi – Mozart (1 min)	15. Font de l'Alzina – Menéndez Pelayo 16. Esportiu Les Oliveres 17. Centre Che Guevara 18. Les Oliveres

A la imatge posterior podem veure el recorregut d'aquesta línia.



Imatge 161. Recorregut de la línia M27. *Imatge extreta de https://moovitapp.com/index/es/transporte_p%C3%BAblico-line-M27-Barcelona-362-10717-719391-0*

7. M30: CAN FRANQUESA → LA VIRREINA

Aquesta línia opera tots els dies. El seu horari és el següent.

Dia	Hores operatives
Dilluns	4:45 – 22:20
Dimarts	4:45 – 22:20
Dimecres	4:45 – 22:20

Dijous	4:45 – 22:20
Divendres	4:45 – 22:20
Dissabte	4:45 – 22:20
Diumenge	7:00 – 22:35

Les seves parades són les següents.

	Anada	Tornada
Passen per Santa Coloma de Gramenet	1. Can Franquesa (punt de sortida) 2. Parc Sandino (1 min) 3. Còrdova 49 (30 seg) 4. Còrdova 57 (30 seg) 5. Mallorca – Còrdova (30 seg) 6. Milton (1 min) 7. Comissaria Mossos d'Esquadra (30 seg) 8. Cap Singuerlín (1 min) 9. Metro Singuerlín (1 min) 10. Av. Catalunya – Parc 15 Pins (1 min) 11. Escola Primavera (1 min) 12. Garcilaso de la Vega (30 seg) 13. Font de Sant Roc (30 seg) 14. Institut Ramon Berenguer IV (30 seg) 15. Cf. La Ginesta – Singuerlín (30 seg)	1. Hospital Esperit Sant 2. Escola Pere de Tera 3. Cap Santa Rosa 4. Raval 5. Av. Generalitat – Av. dels Banús 6. Av. Generalitat – Dr. Torras i Bages 7. Av. Generalitat – Sant Benet 8. Pl. Vila – Metro Santa Coloma 9. Av. Francesc Macià – Safareig 10. Pallaresa – Parc Europa 11. Balears – Pallaresa 12. Ramon Berenguer IV – Aragó 13. Ramon Berenguer IV – Residència 14. Cf. La Ginesta 15. Cifo

	16. Ramon Berenguer IV – Residència (1 min) 17. Ramon Berenguer IV – Aragó (1 min) 18. Pallaresa – Balears (2 min) 19. Cúbics (30 seg) 20. Av. Francesc Macià – Av. Pallaresa (1 min) 21. Av. Francesc Macià – Mare de Déu dels Àngels (1 min) 22. Av. Sta. Coloma – Pg. Llorenç Serra (1 min) 23. Av. Sta. Coloma – Francesc Moragas (1 min) 24. Av. Sta. Coloma – Mossèn Jacint Verdaguer (2 min) 25. Biblioteca Can Peixauet (30 seg) 26. Av. Generalitat – Sant Jordi (1 min) 27. Parc del Molinet (1 min) 28. Hospital Esperit Sant – Pont del Molinet (1 min) 29. Els Safaretjos (30 seg)	16. Institut Ramon Berenguer IV 17. Font de Sant Roc 18. Garcilaso de la Vega 19. Còrdova – Menorca 20. Can Franquesa

A la imatge posterior podem veure el recorregut d'aquesta línia.

Imatge 162. Recorregut de la línia M30. *Imatge extreta de https://moovitapp.com/index/es/transporte_p%C3%BAblico-line-M30-Barcelona-362-10717-3456524-0*

8. B80: CAN FRANQUESA – CENTRE CÍVIC → RIERA ALTA

Aquesta línia opera tots els dies. El seu horari és el següent.

Dia	Hores operatives
Dilluns	4:45 – 22:15
Dimarts	4:45 – 22:15
Dimecres	4:45 – 22:15
Dijous	4:45 – 22:15
Divendres	4:45 – 22:15
Dissabte	4:45 – 22:15
Diumenge	6:00 – 22:30

Les seves parades són les següents.

	Anada	Tornada
Passen per Santa Coloma de Gramenet	1. Can Franquesa – Centre Cívic (punt de sortida) 2. Menorca 39 (1 min) 3. Parc Serralada de Marina (1 min) 4. Còrdova – Menorca (1 min) 5. Parc Sandino (1 min) 6. Còrdova 49 (1 min) 7. Còrdova 57 (30 seg) 8. Mallorca – Còrdova (30 seg) 9. Milton (1 min) 10. Comissaria Mossos d'Esquadra (30 seg) 11. Cap Singuerlín (1 min) 12. Anselm de Riu – Singuerlín (1 min) 13. Anselm de Riu – Font de l'Alzina (30 seg) 14. Parc Moragues (1 min) 15. Av. Francesc Macià – Av. Pallaresa (1 min) 16. Av. Francesc Macià – Mare de Déu dels Àngels (1 min) 17. Av. Sta. Coloma – Pg. Llorenç Serra (1 min) 18. Av. Sta. Coloma – Francesc Moragas (1 min)	1. Riera Alta 2. Santa Eulàlia 3. Metro Església Major 4. Mossèn Camil Rosell – Irlanda 5. Escola Serra de Marina 6. Irlanda – Santa Rosa 7. Banús – Metro Santa Rosa 8. Can Peixauet 9. Av. Generalitat – Dr. Torras i Bages 10. Av. Generalitat – Sant Benet 11. Pl. Vila – Metro Santa Coloma 12. Av. Francesc Macià – Safareig 13. Av. Francesc Macià – Av. Pallaresa 14. Escola Jaume Salvatella 15. Anselm de Riu – Font de l'Alzina 16. Anselm de Riu – Singuerlín 17. Cap Singuerlín 18. Anselm de Riu – Montseny 19. Milton

	19. Av Sta. Coloma – Mossèn Jacint Verdaguer (2 min) 20. Av. Generalitat – Av. dels Banús (1 min) 21. Av. dels Banús – Camprodon (1 min) 22. Irlanda – Mossèn Jacint Verdaguer (2 min) 23. Comissaria Policia Nacional (1 min) 24. Rbla. Sant Sebastià – Irlanda (1 min) 25. Metro Fondo (2 min) 26. Verdi – Mozart (1 min)	20. Av. Anselm de Riu – Eiximenis 21. Còrdova – Menorca 22. Can Franquesa 23. Cabrera 23 24. Can Franquesa – Centre Cívic

A la imatge posterior podem veure el recorregut d’aquesta línia.

Imatge 163. Recorregut de la línia B80. *Imatge extreta de https://moovitapp.com/index/es/transporte_p%C3%BAblico-line-B80-Barcelona-362-10717-178093-0*

9. B81: CAN FRANQUESA – CENTRE CÍVIC → HOSPITAL ESPERIT SANT

Aquesta línia opera tots els dies. El seu horari és el següent.

Dia	Hores operatives
Dilluns	7:00 – 22:15
Dimarts	7:00 – 22:15
Dimecres	7:00 – 22:15
Dijous	7:00 – 22:15
Divendres	7:00 – 22:15
Dissabte	7:00 – 21:00
Diumenge	7:45 – 21:15

Les seves parades són les següents.

	Anada	Tornada
Passen per Santa Coloma de Gramenet	1. Can Franquesa – Centre Cívic (punt de sortida) 2. Menorca 39 (1 min) 3. Parc Serralada de Marina (1 min) 4. Garcilaso de la Vega (1 min) 5. Font de Sant Roc (30 seg) 6. Institut Ramon Berenguer IV (30 seg) 7. Cf. La Ginesta – Singuerlín (30 seg) 8. Residència Ramon Berenguer IV (1 min)	1. Hospital Esperit Sant 2. Escola Pere de Tera 3. Escola Antoni Gaudí 4. Institut Terra Roja 5. Circumval·lació – Urà 6. Circumval·lació – Sant Pasqual 7. Rellotge – Liszt 8. Pl. Rellotge 9. Dalmau – Rbla. Fondo 10. Metro Fondo 11. Sicília – Verdi 12. Rbla. St. Sebastià – Dr. Pagès

	9. Aragó – Almogàvers (1 min) 10. Ramon Berenguer IV – Aragó (30 seg) 11. Balears – Pallaresa (2 min) 12. Prat de la Riba (1 min) 13. Institut Numància (1 min) 14. Poliesportiu La Bastida (1 min) 15. Institut torrent de les Bruixes (1 min) 16. Institut La Bastida (1 min) 17. Riera Alta (1 min) 18. Santa Eulàlia (1 min) 19. Metro Església Major (1 min) 20. Mossèn Camil Rosell – Irlanda (1 min) 21. Escola Serra de Marina (1 min) 22. Rbla. Sant Sebastià – Irlanda (1 min) 23. Metro Fondo (2 min) 24. Pl. Rellotge (1 min) 25. Mercat Fondo – Cap Fondo (1 min) 26. Irlanda – Santa Rosa (2 min) 27. Núria – Sant Andreu (1 min)	13. Escola Serra de Marina 14. Pl. Església 15. Metro Església Major 16. Nord – Cristòfor Colom 17. Wilson – Nord 18. Wilson – Lincoln 19. Sta. Eulàlia – Salut 20. Institut La Bastida 21. Institut Torrent de les Bruixes 22. Accés Recinte Torribera 23. Ramon Berenguer IV – Aragó 24. Ramon Berenguer IV – Residència 25. Cf. La Ginesta – Singuerlín 26. Escola Primavera 27. Comissaria Mossos d'Esquadra 28. Cap Singuerlín 29. Sants – Anselm de Riu 30. Sants – Àngel Prats 31. Isaac Albéniz – Montseny 32. Montseny 33. Milton

	28. Sant Andreu – Mas Mari (2 min) 29. Centre Cívic Els Pins (1 min) 30. Escola Tanit (1 min) 31. Institut Terra Roja (1 min) 32. Escola Antoni Gaudí (1 min) 33. Cap Santa Rosa (2 min) 34. Av. Generalitat – Sant Jordi (2 min) 35. Parc del Molinet (1 min) 36. Hospital Esperit Sant – Pont del Molinet (1 min) 37. Hospital Esperit Sant (1 min)	34. Av. Anselm de Riu – Eiximenis 35. Còrdova – Menorca 36. Can Franquesa 37. Cabrera 23 38. Can Franquesa – Centre Cívic

A la imatge posterior podem veure el recorregut d'aquesta línia.

Imatge 164. Recorregut de la línia B81. *Imatge extreta de https://moovitapp.com/index/es/transporte_p%C3%BAblico-line-B81-Barcelona-362-10717-178094-0*

10. B84: CEMENTIRI NOU → INSTITUT TERRA ROJA

Aquesta línia opera només els diumenges i, com que no és una línia en horari feiner, no es tindrà en compte en l'optimització. El seu horari és el següent.

Dia	Hores operatives
Dilluns	Sense servei
Dimarts	Sense servei
Dimecres	Sense servei
Dijous	Sense servei
Divendres	Sense servei
Dissabte	Sense servei
Diumenge	8:10 – 14:10

Les seves parades són les següents.

	Anada	Tornada
Passen per Santa Coloma de Gramenet	1. Cementiri Nou (punt de sortida) 2. Recinte Cementiri (30 seg) 3. Accés Cementiri (30 seg) 4. Tanatori (30 seg) 5. Parc de Can Zam (2 min) 6. Metro de Can Zam (30 seg) 7. Parc Moragues (1 min) 8. Av. Francesc Macià – Av. Pallaresa (2 min) 9. Av. Francesc Macià – Mare de Déu dels Àngels (1 min)	1. Institut Terra Roja 2. Escola Antoni Gaudí 3. Cap Santa Rosa 4. Raval 5. Av. Generalitat – Av. dels Banús 6. Av. dels Banús – Camprodon 7. Joan Valentí Escales 8. Mercat Fondo – Cap Fondo 9. Irlanda – Mossèn Jacint Verdaguer 10. Comissaria Policia Nacional

	10. Av. Sta. Coloma – Pg. Llorenç Serra (1 min) 11. Av. Sta. Coloma – Francesc Moragas (2 min) 12. Av. Sta. Coloma – Mossèn Jacint Verdaguer (2 min) 13. Av. Generalitat – Av. dels Banús (2 min) 14. Av. dels Banús – Camprodon (2 min) 15. Núria – Sant Andreu (2 min) 16. Institut Terra Roja (2 min)	11. Rambla Sant Sebastià – Irlanda 12. Pl. Vila – Metro de Santa Coloma 13. Av. Francesc Macià – Safareig 14. Escola Jaume Salvatella 15. Metro de Can Zam 16. Tanatori 17. Accés Cementiri 18. Recinte Cementiri 19. Cementiri Nou

A la imatge posterior podem veure el recorregut d'aquesta línia.

Imatge 165. Recorregut de la línia B84. *Imatge extreta de https://moovitapp.com/index/es/transporte_p%C3%BAblico-line-B84-Barcelona-362-10717-178095-0*

11. B82: SANTA COLOMA → BADALONA (C.S. EL CARME)

Aquesta línia opera només els dimecres, dijous, divendres i dissabte. El seu horari és el següent.

Dia	Hores operatives
Dilluns	Sense servei
Dimarts	Sense servei
Dimecres	7:30 – 21:00
Dijous	7:30 – 21:00
Divendres	7:30 – 21:00
Dissabte	7:30 – 21:00
Diumenge	Sense servei

Les seves parades són les següents.

	Anada	Tornada
Passen per Santa Coloma de Gramenet	1. Centre Emili Mira (punt de sortida) 2. Accés Recinte Torribera (2 min) 3. Pallaresa – Balears (2 min) 4. Cúbics (30 seg) 5. Av. Francesc Macià – Av. Pallaresa (1 min) 6. Av. Francesc Macià – Mare de Déu dels Àngels (1 min) 7. Pl. Vila – Metro Santa Coloma (1 min) 8. Mercat Sagarra (1 min)	1. Av. Mònaco 2. Metro Fondo 3. Rbla. Sant Sebastià – Dr. Pagès 4. Rbla. Sant Sebastià – Irlanda 5. Pl. Vila – Metro Santa Coloma 6. Av. Francesc Macià – Safareig 7. Pallaresa – Parc Europa 8. Mossèn Camil Rosell – Nord 9. Nord – Cristòfor Colom

	9. Rbla. Sant Sebastià – Irlanda (2 min) 10. Metro Fondo (2 min) 11. Verdi – Mozart (1 min)	10. Wilson – Nord 11. Wilson – Lincoln 12. Campus Alimentació UB 13. Centre Emili Mira

A la imatge posterior podem veure el recorregut d'aquesta línia.

Imatge 166. Recorregut de la línia B82. *Imatge extreta de https://moovitapp.com/index/es/transporte_p%C3%BAblico-line-B82-Barcelona-362-10717-785035-0*

12. BARCELONA (EST. SANT ANDREU) → M28: BADALONA (CAN RUTI)

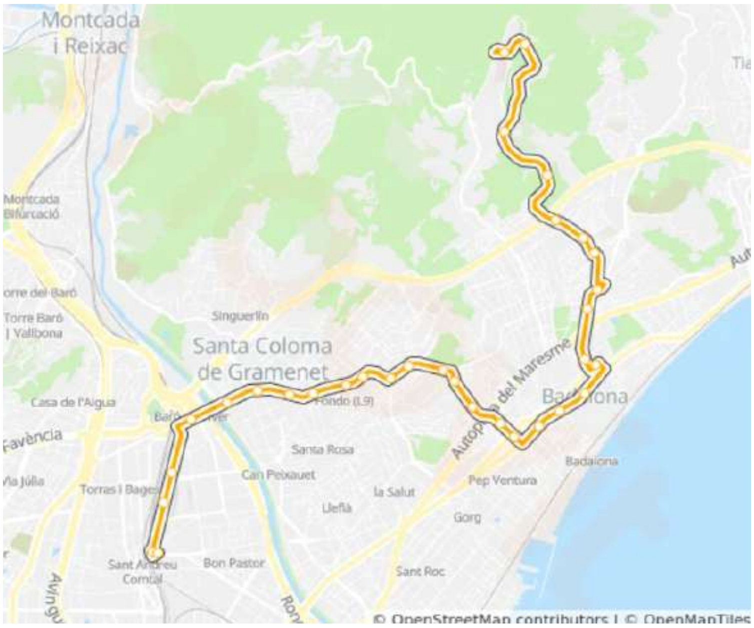
Aquesta línia opera tots els dies. El seu horari és el següent.

Dia	Hores operatives
Dilluns	5:20 – 22:20
Dimarts	4:40 – 22:27
Dimecres	4:40 – 22:27
Dijous	4:40 – 22:27
Divendres	4:40 – 22:27
Dissabte	5:20 – 22:20
Diumenge	6:57 – 22:17

Les seves parades són les següents.

	Anada	Tornada
Passen per Santa Coloma de Gramenet	1. Pg. Santa Coloma – Tiana (ve d’una parada de Barcelona, primera parada a Santa Coloma) 2. Pg. Llorenç Serra – Sant Joaquim (2 min) 3. Pl. Vila – Metro Santa Coloma (1 min) 4. Mercat Sagarra (1 min) 5. Rbla. Sant Sebastià – Irlanda (2 min) 6. Metro Fondo (2 min) 7. Verdi – Mozart (2 min)	1. Av. Mònaco 2. Metro Fondo 3. Rbla. Sant Sebastià – Dr. Pagès 4. Rbla. Sant Sebastià – Irlanda 5. Pl. Vila – Metro Santa Coloma 6. Pg. Llorenç Serra – Av. Francesc Macià 7. Pg. Santa Coloma – Baró de Viver

A la imatge posterior podem veure el recorregut d’aquesta línia.



Imatge 167. Recorregut de la línia M28. *Imatge extreta de https://moovitapp.com/index/es/transporte_p%C3%BAblico-line-M28-Barcelona-362-10717-719392-0*

13. M19: BARCELONA (VALL D'HEBRON) → BADALONA (CAN RUTI)

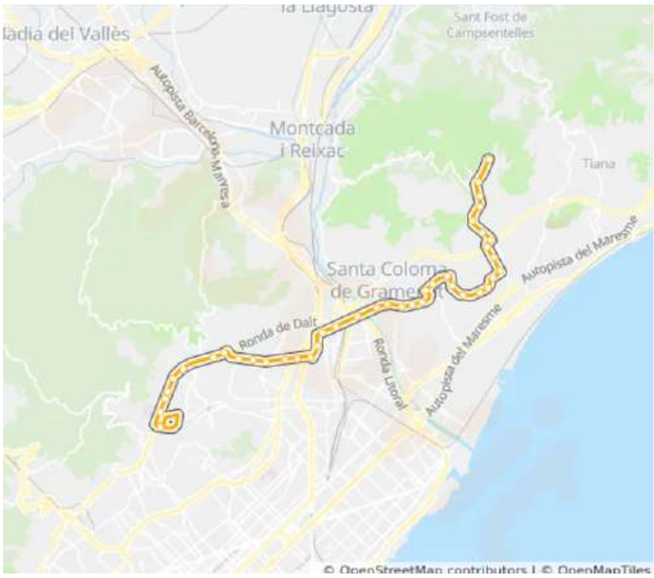
Aquesta línia opera tots els dies. El seu horari és el següent.

Dia	Hores operatives
Dilluns	6:00 – 22:30
Dimarts	6:00 – 22:30
Dimecres	6:00 – 22:15
Dijous	6:00 – 22:15
Divendres	6:00 – 22:15
Dissabte	7:00 – 22:30
Diumenge	7:00 – 22:30

Les seves parades són les següents.

	Anada	Tornada
Passen per Santa Coloma de Gramenet	1. Pg. Santa Coloma – Tiana (punt de sortida) 2. Pg. Llorenç Serra – Sant Joaquim (2 min) 3. Pl. Vila – Metro Santa Coloma (1 min) 4. Mercat Sagarra (1 min) 5. Rbla. Sant Sebastià – Irlanda (2 min) 6. Metro Fondo (2 min) 7. Verdi – Mozart (2 min)	1. Metro Fondo 2. Rbla. Sant Sebastià – Dr. Pagès 3. Rbla. Sant Sebastià – Irlanda 4. Pl. Vila – Metro Santa Coloma 5. Pg. Llorenç Serra – Av. Francesc Macià 6. Pg. Santa Coloma – Baró de Viver

A la imatge posterior podem veure el recorregut d'aquesta línia.



Imatge 168. Recorregut de la línia M19. *Imatge extreta de https://moovitapp.com/index/es/transporte_p%C3%BAblico-line-M19-Barcelona-362-10717-3456520-0*

Les línies que hi ha a continuació són de TMB.

1. V33: FÒRUM CAMPUS BESÒS → SANTA COLOMA

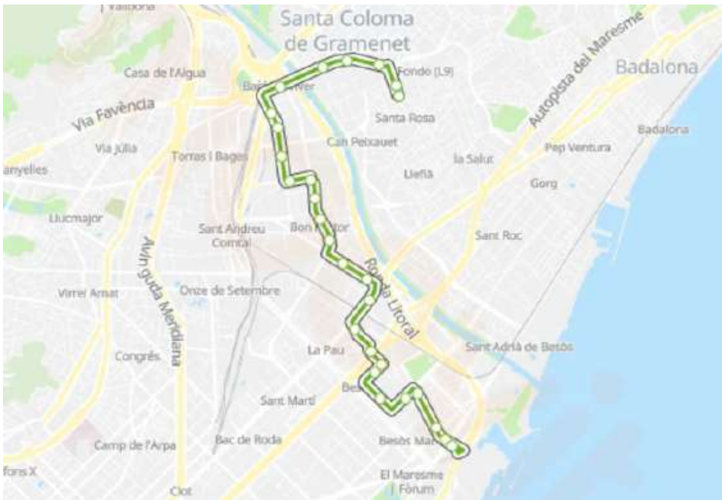
   Aquesta línia opera tots els dies. El seu horari és el següent.

Dia	Hores operatives
Dilluns	5:35 – 22:30
Dimarts	5:35 – 22:30
Dimecres	5:35 – 22:30
Dijous	5:35 – 22:30
Divendres	5:35 – 22:30
Dissabte	6:30 – 22:30
Diumenge	8:35 – 22:30

Les seves parades són les següents.

	Anada	Tornada
Passen per Santa Coloma de Gramenet	1. Tiana – Campins (punt de sortida) 2. Pg. Llorenç Serra – Sant Joaquim (1 min) 3. Av. Sta. Coloma – Pg. Llorenç Serra (1 min) 4. Av. Sta. Coloma (1 min) 5. Metro Can Peixauet (3 min) 6. Can Peixauet (1 min) 7. Av. dels Banús – Camprodon (1 min) 8. Irlanda – Mossèn Jacint Verdaguer (2 min)	1. Irlanda – Mossèn Jacint Verdaguer 2. Rbla. Sant Sebastià – Irlanda 3. Pl. Vila – Metro Santa Coloma 4. Pg. Llorenç Serra – Av. Francesc Macià 5. Pg. Santa Coloma – Baró de Viver

A la imatge posterior podem veure el recorregut d'aquesta línia.

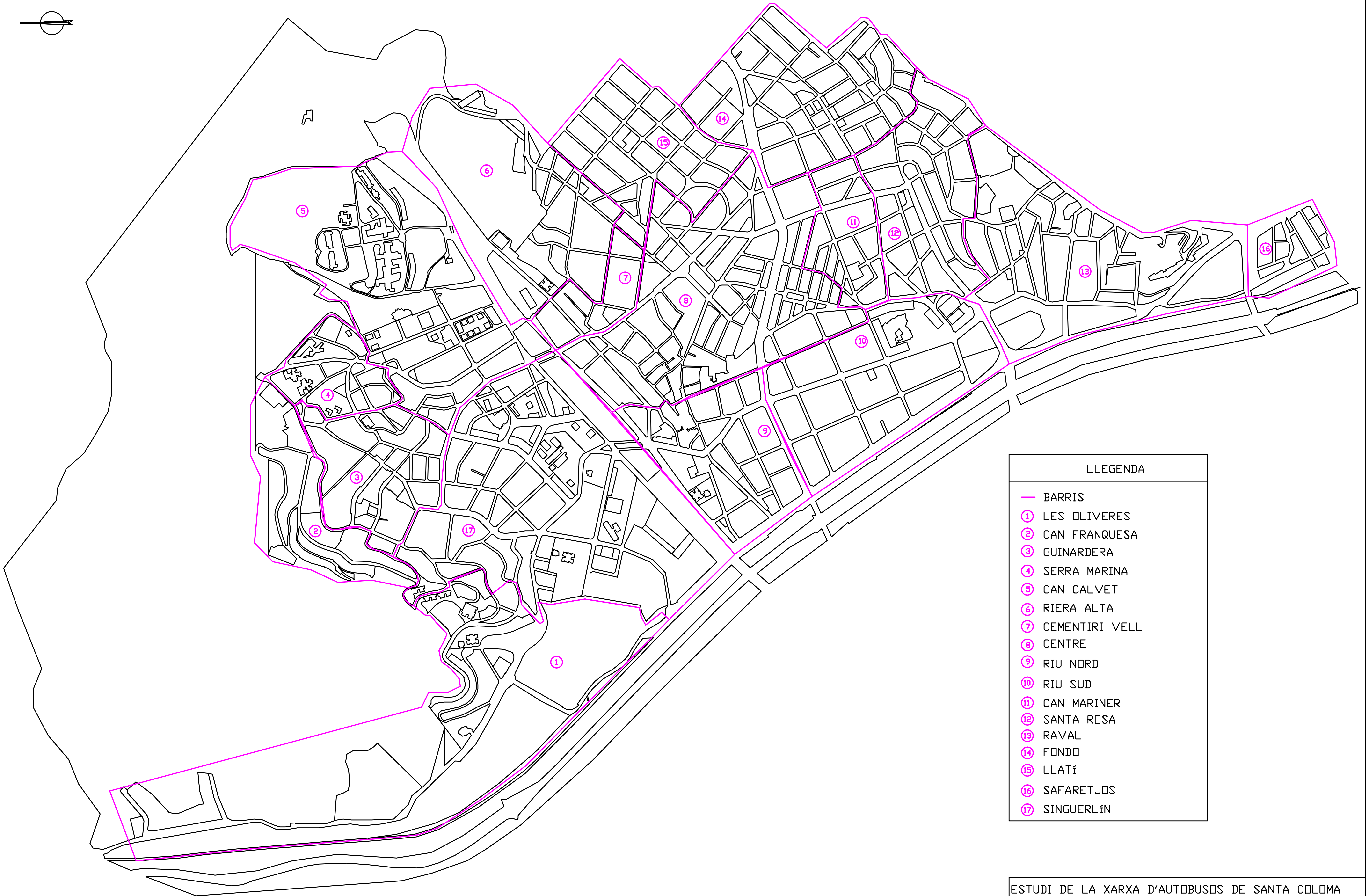


Imatge 169. Recorregut de la línia V33. *Imatge extreta de https://moovitapp.com/index/es/transporte_p%C3%BAblico-line-V33-Barcelona-362-10708-747931-0*

10.2. Annex 2: plànols

En aquest apartat es troben els següents plànols en Din A3:

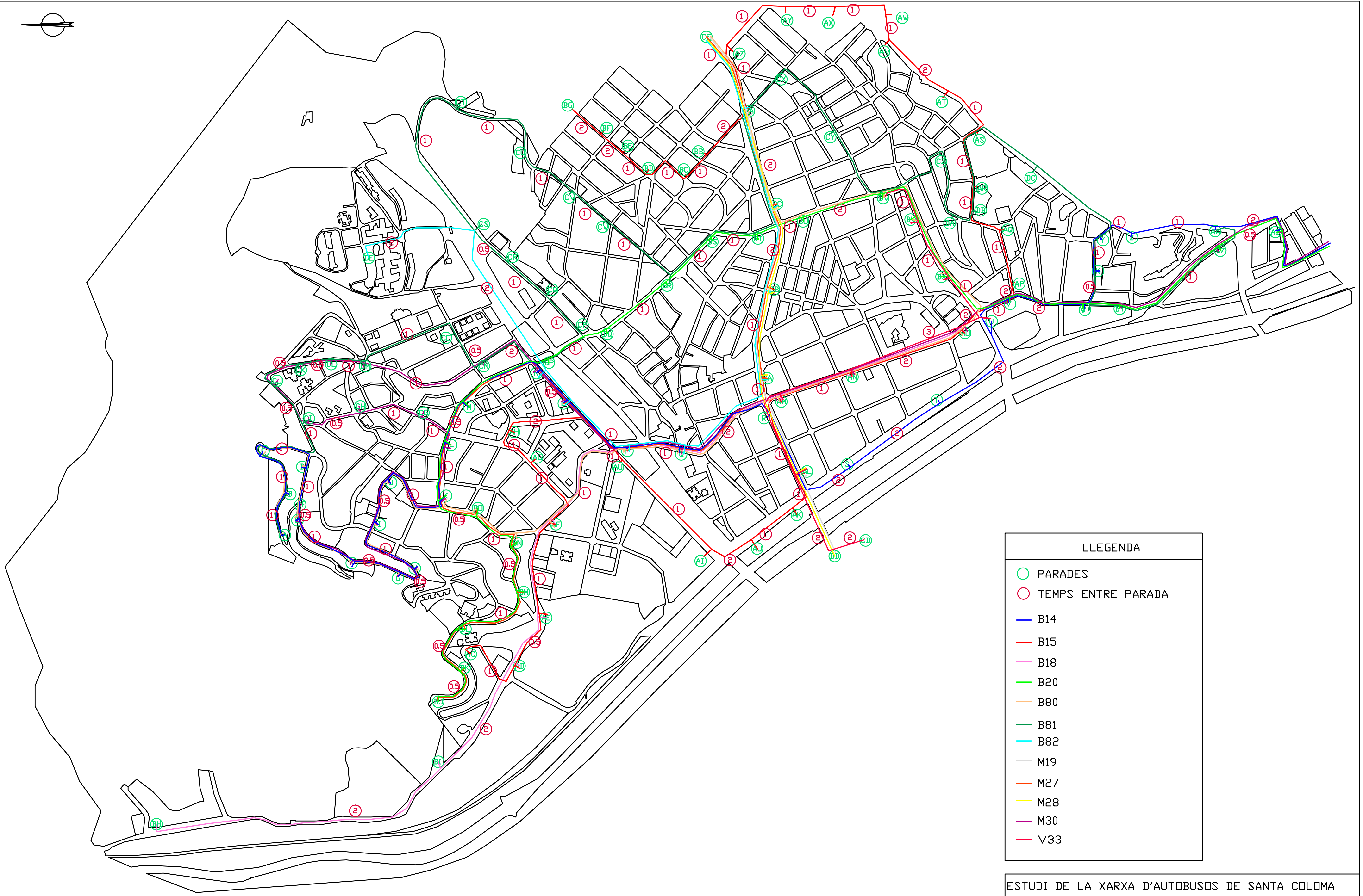
- Plànol 1: Estudi dels barris.
- Plànol 2: Estudi de les línies d'autobús.
- Plànol 3: Graf de les línies d'autobús.
- Plànol 4: Barris amb parades i densitat de població.
- Plànol 5: Graf optimitzat de les parades.
- Plànol 6: Graf optimitzat de les línies d'autobús.
- Plànol 7: Graf optimitzat de les línies d'autobús amb bus de barri.
- Plànol 8: Graf optimitzat de les línies d'autobús amb línies antigues.
- Plànol 9: Resultat de les línies d'autobús optimitzades amb bus de barri.
- Plànols 10: Resultat de les línies d'autobús optimitzades amb línies antigues.



LLEGENDA

- BARRIS
- ① LES OLIVERES
- ② CAN FRANQUESA
- ③ GUINARDERA
- ④ SERRA MARINA
- ⑤ CAN CALVET
- ⑥ RIERA ALTA
- ⑦ CEMENTIRI VELL
- ⑧ CENTRE
- ⑨ RIU NORD
- ⑩ RIU SUD
- ⑪ CAN MARINER
- ⑫ SANTA ROSA
- ⑬ RAVAL
- ⑭ FONDO
- ⑮ LLATÍ
- ⑯ SAFARETJOS
- ⑰ SINGUERLÍN

ESTUDI DE LA XARXA D'AUTOBUSOS DE SANTA COLOMA DE GRAMENET		
1	ESTUDI DELS BARRIS E=1:12000	
	MIREIA MARCOS CAÑAL	JULIOL 2022



LLEGENDA

- PARADES
- TEMPS ENTRE PARADA
- B14
- B15
- B18
- B20
- B80
- B81
- B82
- M19
- M27
- M28
- M30
- V33

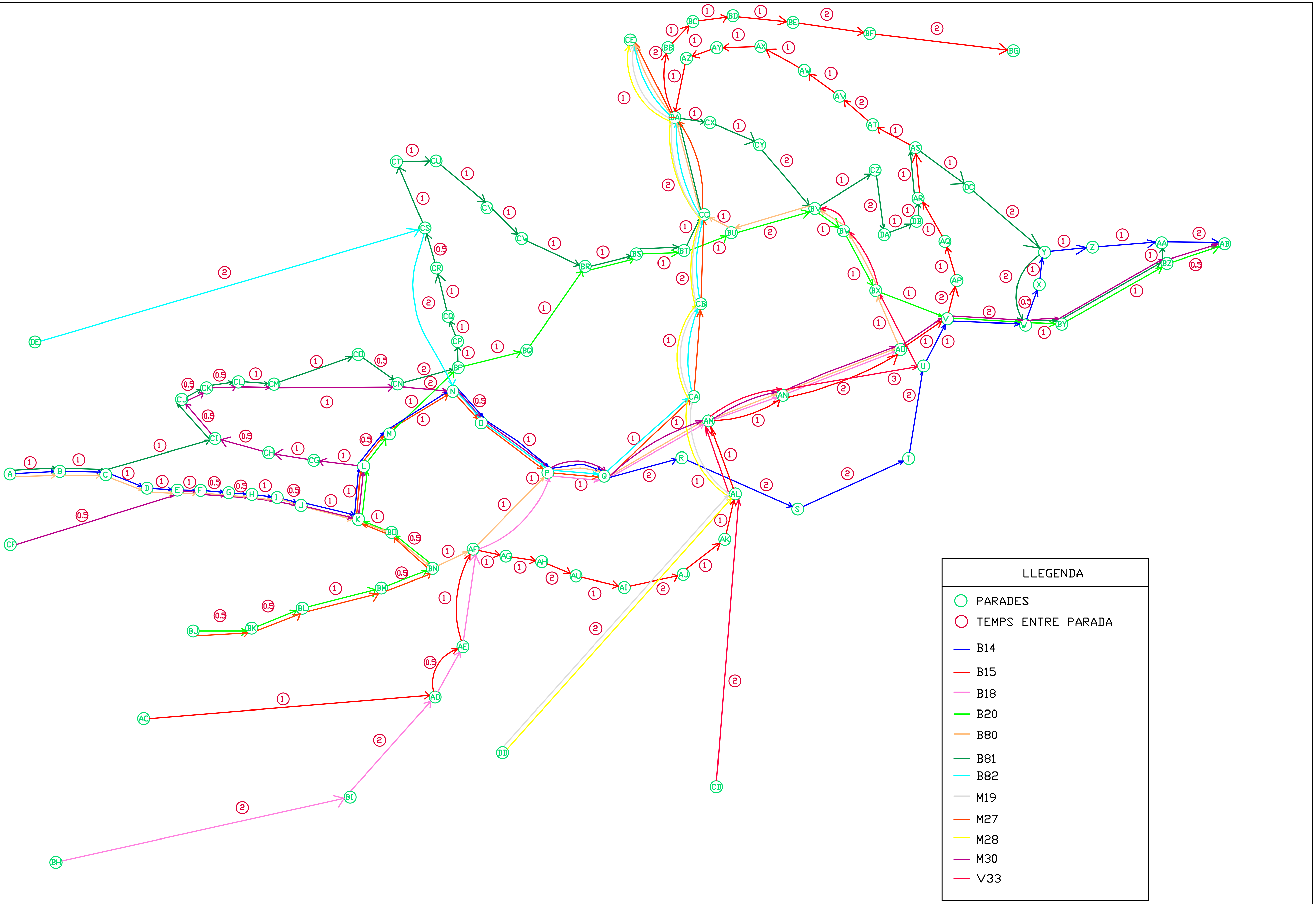
ESTUDI DE LA XARXA D'AUTOBUSOS DE SANTA COLOMA DE GRAMENET

2

ESTUDI DE LES LÍNIES D'AUTOBUS
E=1:12000

MIREIA MARCOS CAÑAL

JULIOL 2022



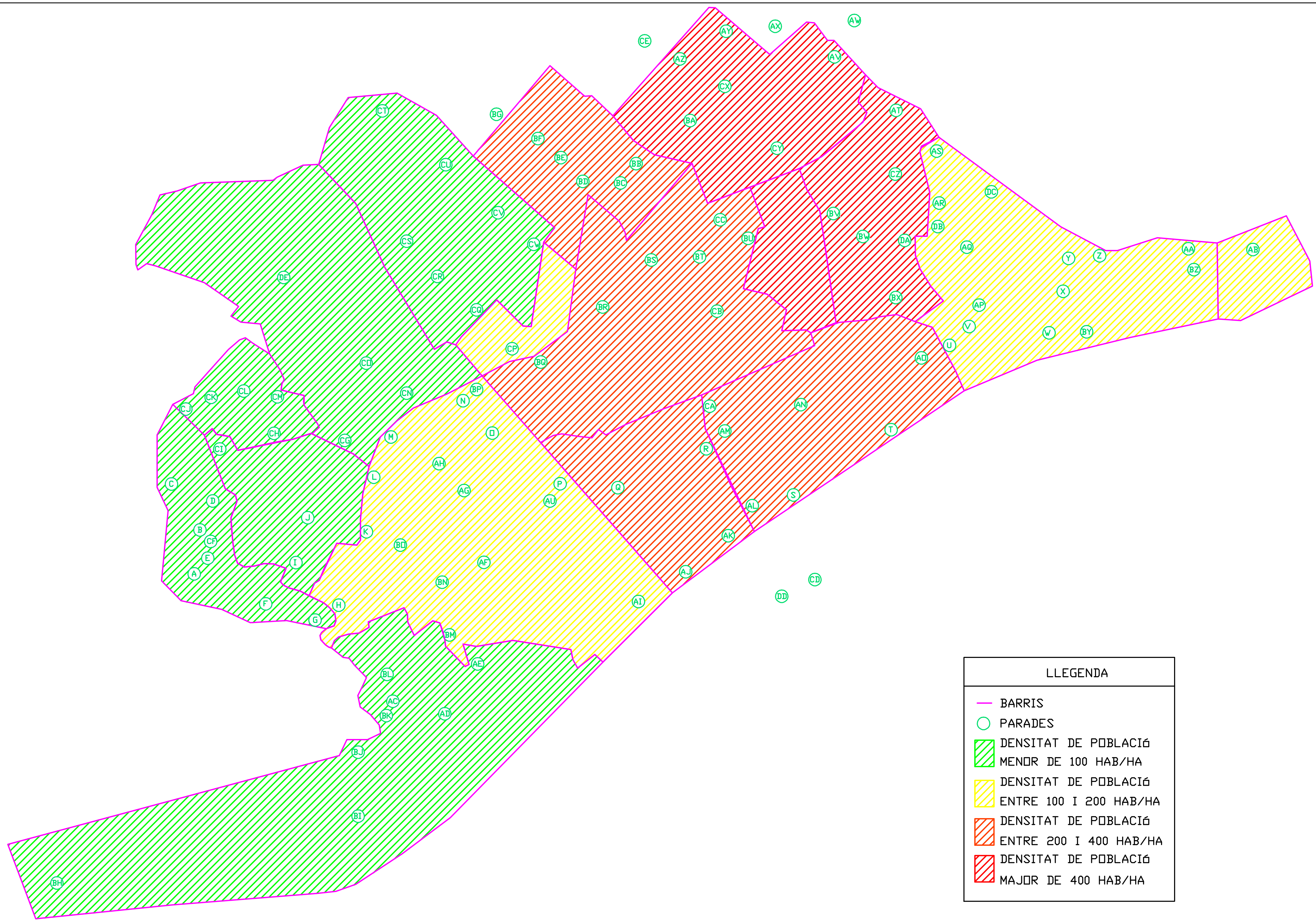
ESTUDI DE LA XARXA D'AUTOBUSOS DE SANTA COLOMA DE GRAMENET

3

GRAF DE LES LÍNIES D'AUTOBUS

MIREIA MARCOS CAÑAL

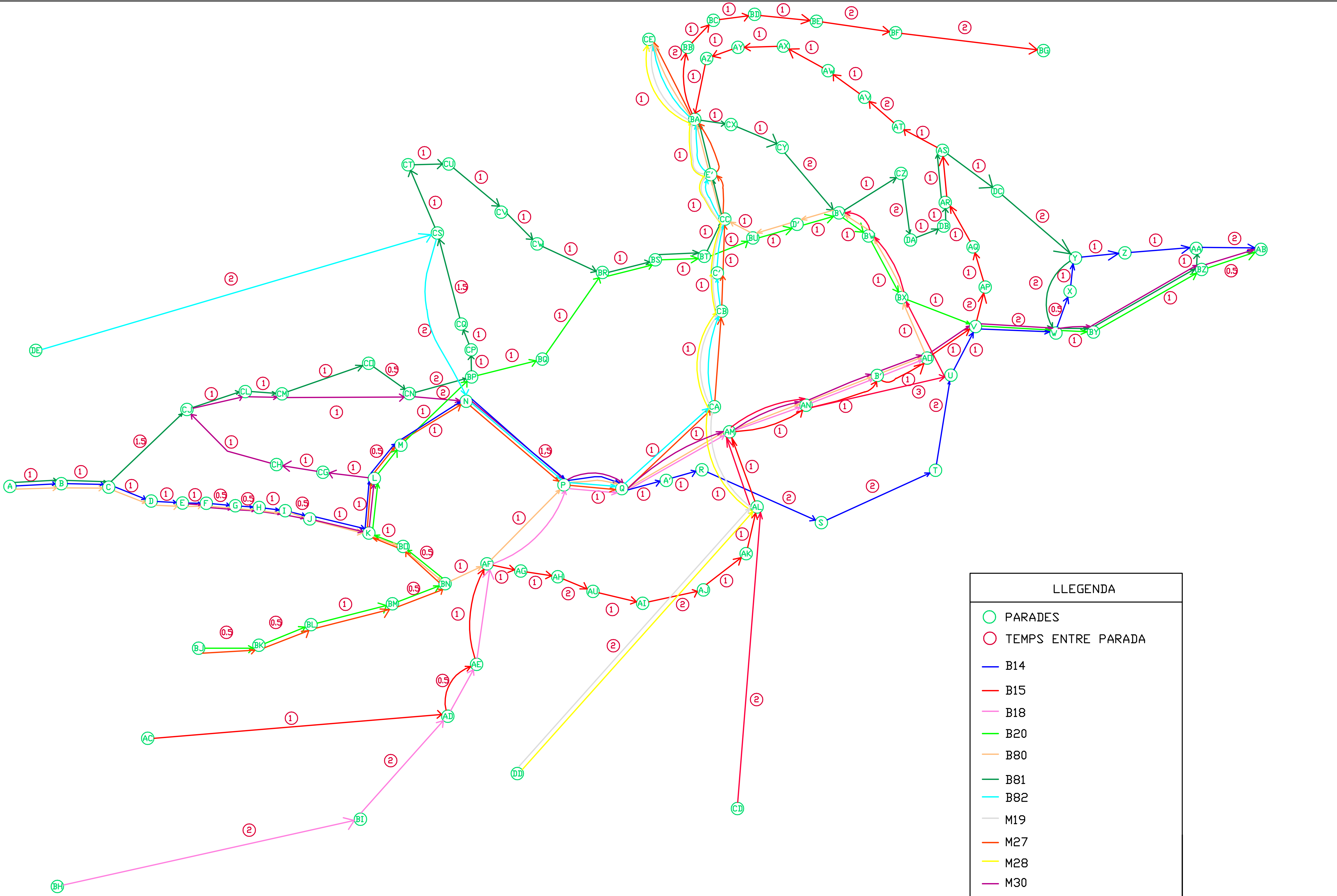
JULIOL 2022



LLEGENDA

- BARRIS
- PARADES
- DENSITAT DE POBLACIÓ MENOR DE 100 HAB/HA
- DENSITAT DE POBLACIÓ ENTRE 100 I 200 HAB/HA
- DENSITAT DE POBLACIÓ ENTRE 200 I 400 HAB/HA
- DENSITAT DE POBLACIÓ MAJOR DE 400 HAB/HA

ESTUDI DE LA XARXA D'AUTOBUSOS DE SANTA COLOMA DE GRAMENET		
4	BARRIS AMB PARADES I DENSITAT DE POBLACIÓ E=1:12000	
	MIREIA MARCOS CAÑAL	JULIOL 2022



LLEGENDA

- PARADES
- TEMPS ENTRE PARADA
- B14
- B15
- B18
- B20
- B80
- B81
- B82
- M19
- M27
- M28
- M30
- V33

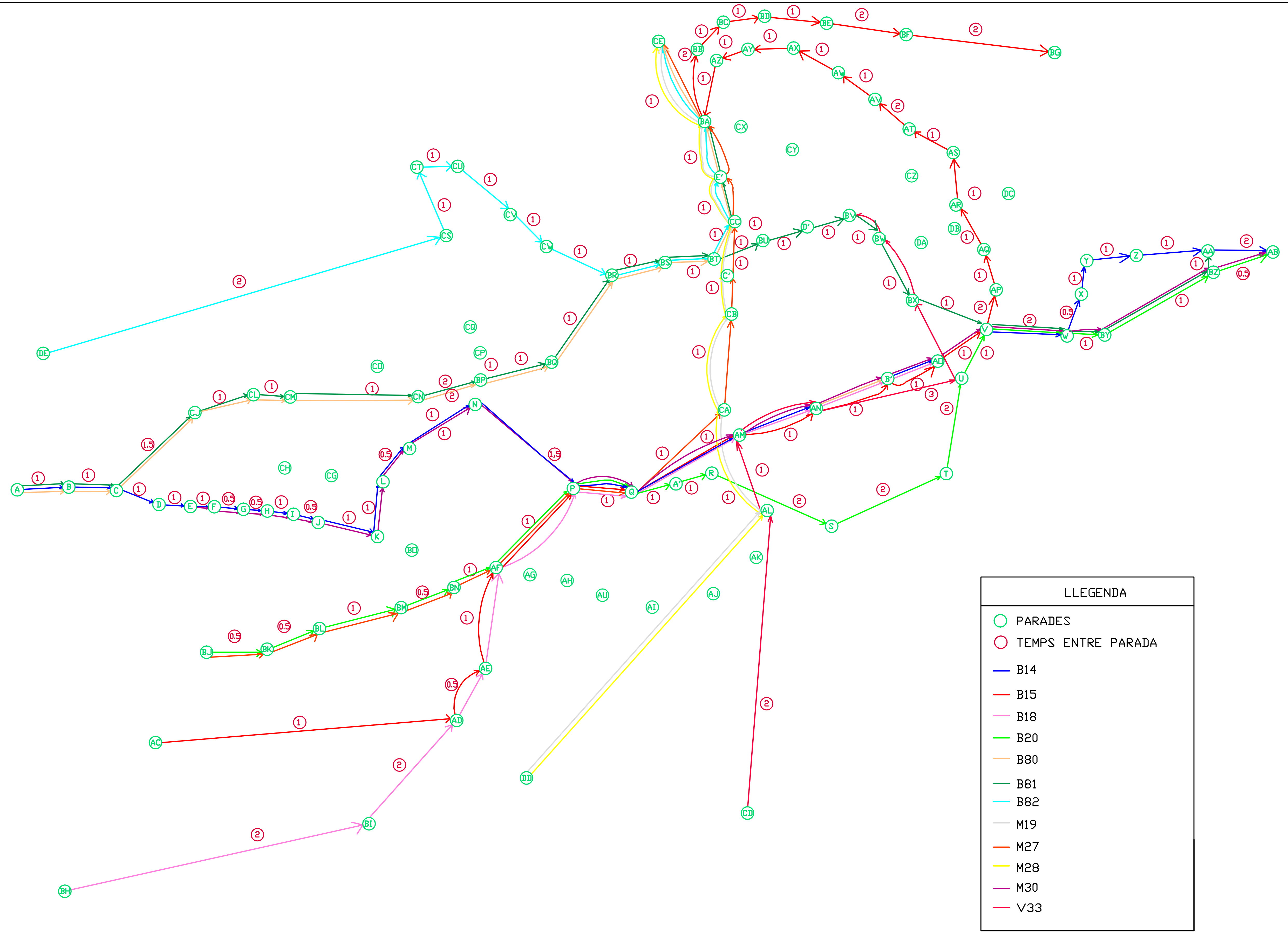
ESTUDI DE LA XARXA D'AUTOBUSOS DE SANTA COLOMA DE GRAMENET

5

GRAF OPTIMITZAT DE LES PARADES

MIREIA MARCOS CAÑAL

SETEMBRE 2022



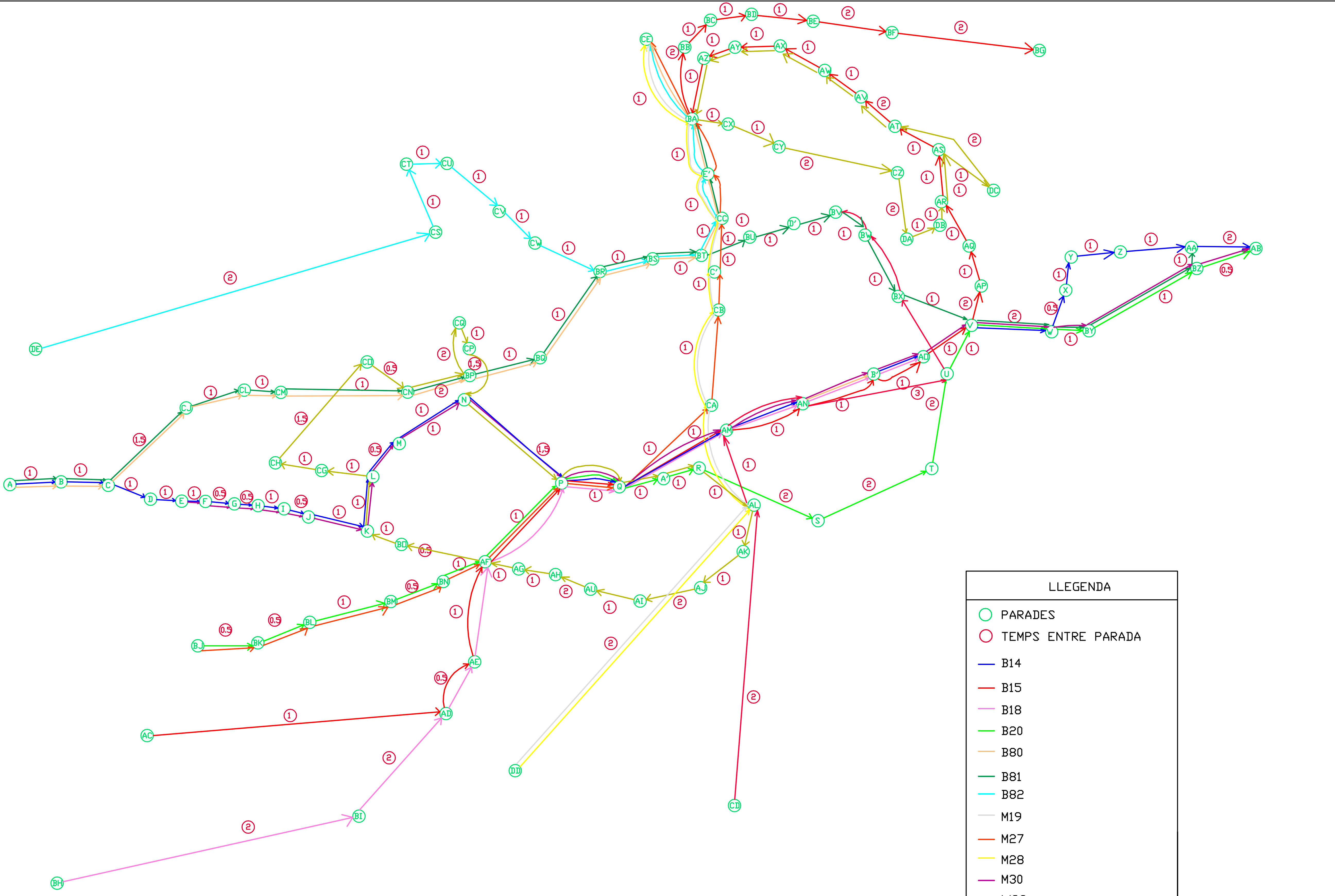
ESTUDI DE LA XARXA D'AUTOBUSOS DE SANTA COLOMA DE GRAMENET

6

GRAF OPTIMITZAT DE LES LÍNIES D'AUTOBÚS

MIREIA MARCOS CAÑAL

JULIOL 2022



LLEGENDA

- PARADES
- TEMPS ENTRE PARADA
- B14
- B15
- B18
- B20
- B80
- B81
- B82
- M19
- M27
- M28
- M30
- V33
- BUS DE BARRI

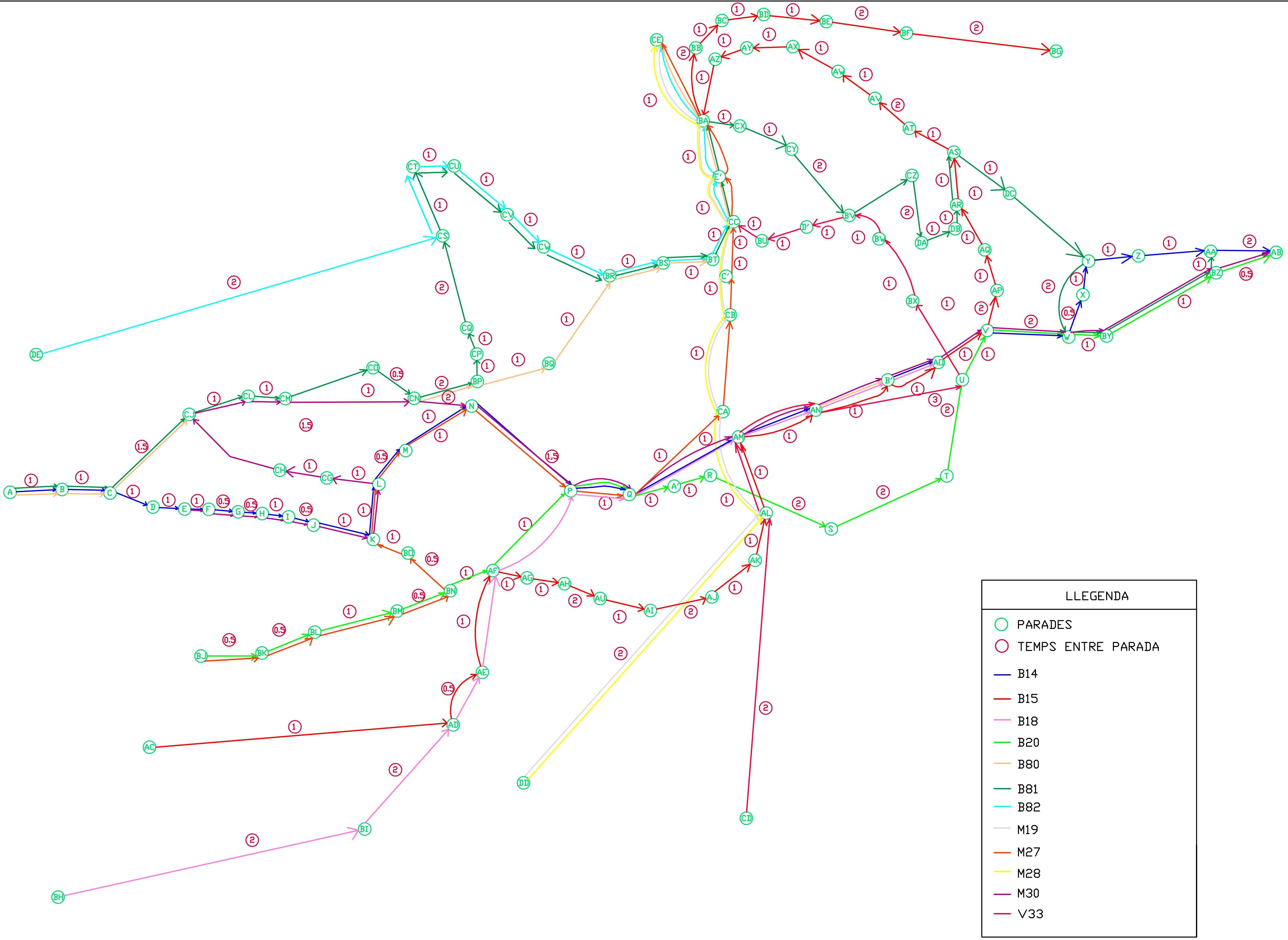
ESTUDI DE LA XARXA D'AUTOBUSOS DE SANTA COLOMA DE GRAMENET

7

GRAF OPTIMITZAT DE LES LÍNIES D'AUTOBÚS AMB BUS DE BARRI

MIREIA MARCOS CAÑAL

SETEMBRE 2022

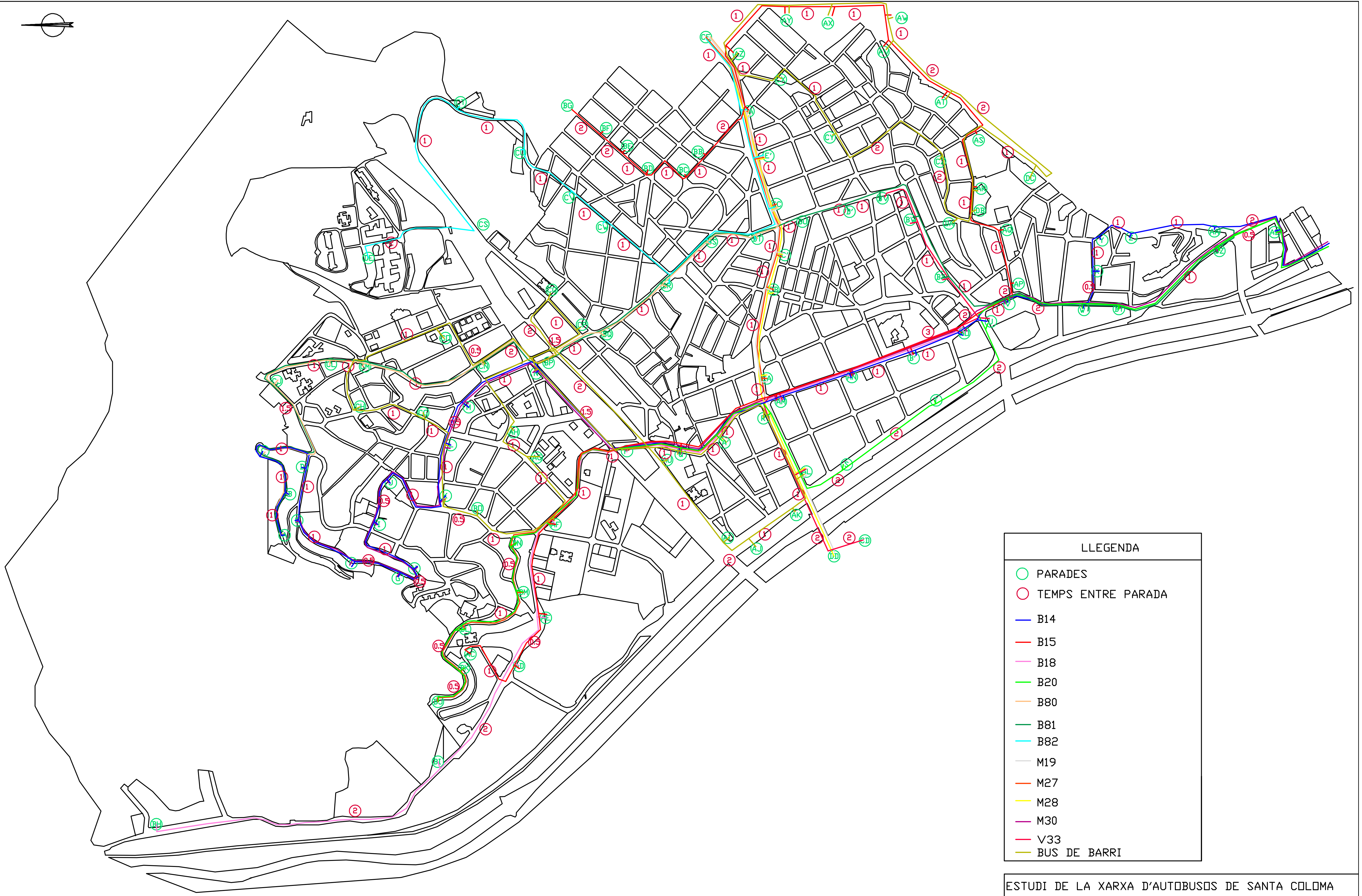


ESTUDI DE LA XARXA D'AUTOBUSOS DE SANTA COLOMA DE GRAMENET

8

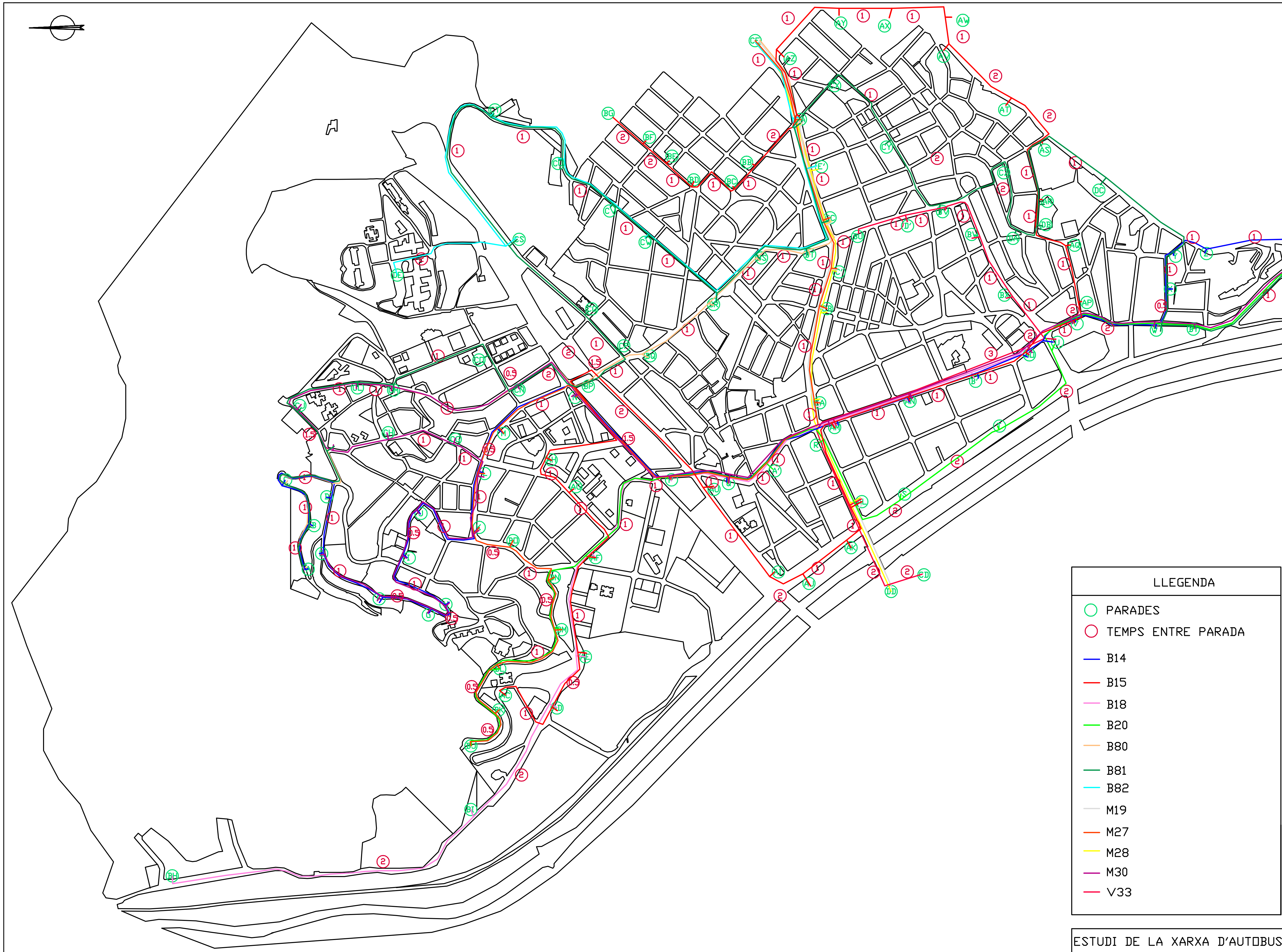
GRAF OPTIMITZAT DE LES LÍNIES D'AUTOBÚS AMB LÍNIES ANTIGUES

MIREIA MARCOS CAÑAL | SETEMBRE 2022



ESTUDI DE LA XARXA D'AUTOBUSOS DE SANTA COLOMA DE GRAMENET

9	RESULTAT DE LES LÍNIES D'AUTOBUS OPTIMITZADES AMB BUS DE BARRI E=1:12000	
	MIREIA MARCOS CAÑAL	OCTUBRE 2022



ESTUDI DE LA XARXA D'AUTOBUSOS DE SANTA COLOMA DE GRAMENET

10

RESULTAT DE LES LÍNIES D'AUTOBUS OPTIMITZADES AMB LÍNIES ANTIGUES
E=1:12000

MIREIA MARCOS CAÑAL

OCTUBRE 2022

10.3. Annex 3: Programació dels LEDs amb Arduino

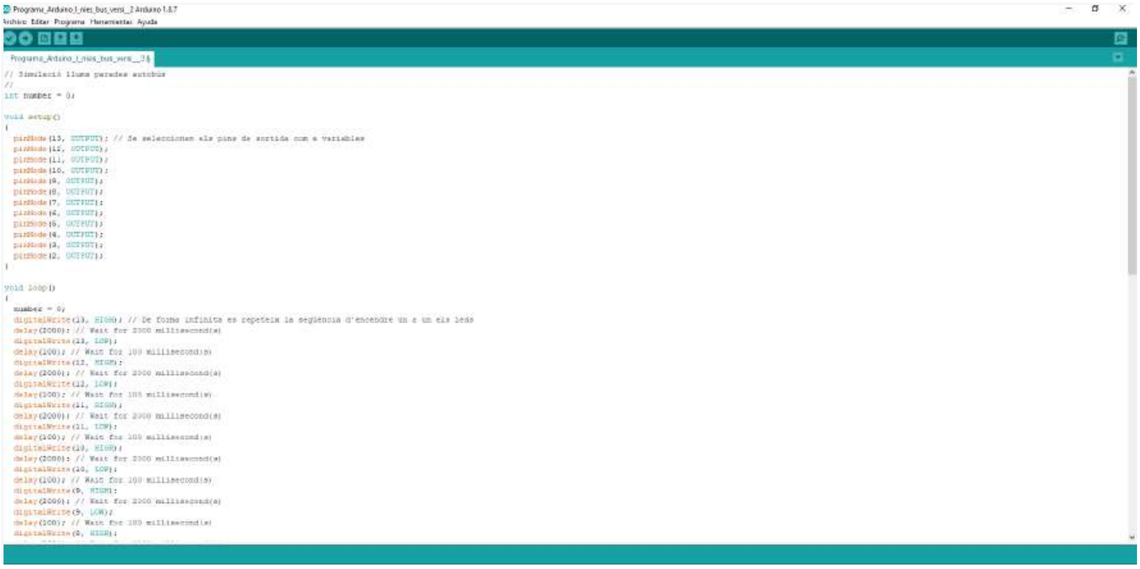
```
// Simulació llums parades autobús
//
int number = 0;

void setup()
{
  pinMode(13, OUTPUT); // Se seleccionen els pins de sortida com a variables
  pinMode(12, OUTPUT);
  pinMode(11, OUTPUT);
  pinMode(10, OUTPUT);
  pinMode(9, OUTPUT);
  pinMode(8, OUTPUT);
  pinMode(7, OUTPUT);
  pinMode(6, OUTPUT);
  pinMode(5, OUTPUT);
  pinMode(4, OUTPUT);
  pinMode(3, OUTPUT);
  pinMode(2, OUTPUT);
}

void loop()
{
  number = 0;
  digitalWrite(13, HIGH); // De forma infinita es repeteix la seqüència següent:
primer encén un a un els LEDs
  delay(2000); // Espera 2000 ms
  digitalWrite(13, LOW);
  delay(100); // Espera 100 ms
  digitalWrite(12, HIGH);
  delay(2000); // Espera 2000 ms
  digitalWrite(12, LOW);
  delay(100); // Espera 100 ms
  digitalWrite(11, HIGH);
  delay(2000); // Espera 2000 ms
  digitalWrite(11, LOW);
  delay(100); // Espera 100 ms
  digitalWrite(10, HIGH);
  delay(2000); // Espera 2000 ms
  digitalWrite(10, LOW);
  delay(100); // Espera 100 ms
  digitalWrite(9, HIGH);
  delay(2000); // Espera 2000 ms
  digitalWrite(9, LOW);
  delay(100); // Espera 100 ms
  digitalWrite(8, HIGH);
  delay(2000); // Espera 2000 ms
```

```
  digitalWrite(8, LOW);
  delay(100); // Espera 100 ms
  digitalWrite(7, HIGH);
  delay(2000); // Espera 2000 ms
  digitalWrite(7, LOW);
  delay(100); // Espera 100 ms
  digitalWrite(6, HIGH);
  delay(2000); // Espera 2000 ms
  digitalWrite(6, LOW);
  delay(100); // Espera 100 ms
  digitalWrite(5, HIGH);
  delay(2000); // Espera 2000 ms
  digitalWrite(5, LOW);
  delay(100); // Espera 100 ms
  digitalWrite(4, HIGH);
  delay(2000); // Espera 2000 ms
  digitalWrite(4, LOW);
  delay(100); // Espera 100 ms
  digitalWrite(3, HIGH);
  delay(2000); // Espera 2000 ms
  digitalWrite(3, LOW);
  delay(100); // Espera 100 ms
  digitalWrite(2, HIGH);
  delay(2000); // Espera 2000 ms
  digitalWrite(2, LOW);
  delay(100); // Espera 100 ms
  number = 1;
  if (number == 1) {
    digitalWrite(13, HIGH); // Quan ja s'han encès un a un els LEDs, s'encenen
tots
    digitalWrite(12, HIGH);
    digitalWrite(11, HIGH);
    digitalWrite(10, HIGH);
    digitalWrite(9, HIGH);
    digitalWrite(8, HIGH);
    digitalWrite(7, HIGH);
    digitalWrite(6, HIGH);
    digitalWrite(5, HIGH);
    digitalWrite(4, HIGH);
    digitalWrite(3, HIGH);
    digitalWrite(2, HIGH);
    delay(3000); // Espera 3000 ms
    digitalWrite(13, LOW); // Un cop s'han encès tots s'apaguen
    digitalWrite(12, LOW);
    digitalWrite(11, LOW);
    digitalWrite(10, LOW);
    digitalWrite(9, LOW);
    digitalWrite(8, LOW);
    digitalWrite(7, LOW);
    digitalWrite(6, LOW);
```

```
      digitalWrite(5, LOW);
      digitalWrite(4, LOW);
      digitalWrite(3, LOW);
      digitalWrite(2, LOW);
      delay(100); // Espera 100 ms
    }
    delay(100); // Espera 100 ms
  }
```



Imatge 170. Imatge de la primera pantalla de codi en Arduino. *Font pròpia*

Imatge 171. Imatge de la segona pantalla de codi en Arduino. *Font pròpia*

Imatge 172. Imatge de la tercera pantalla de codi en Arduino. *Font pròpia*